ANDREI OCTAVIAN DOBRE

MATEMATICĂ

-CULEGERE-
BAC

MATEMATICĂ

-CULEGERE-

BAC

SUBIECTE ȘI SOLUȚII

SUBIECTE

Varianta 1

Prof. Alexandru Elena-Marcela

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Arătați că $(1-i)^{16}$ este număr real.

(5p) **2.** Determinați valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-8x+1$.

(5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=3$.

(5p) **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

(5p) **5**. Determinați coordonatele centrului de greutate al ΔABC știind că $A(-2,-1)$, $B(2,0)$ și $C(0,7)$.

(5p) **6.** Determinați măsura unghiului A a triunghiului ABC ascuțitunghic care are $BC=4\sqrt{3}$ și lungimea razei cercului circumscris egală cu 4.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ și mulțimea $C(M)=\left\{A=\begin{pmatrix}x & 3y\\ y & x\end{pmatrix},\ x,y\in C\right\}$

(5p) **a)** Arătați că $\forall\ A\in C(M)$, $AM=MA$;

(5p) **b)** Arătați că dacă $B\in C(M)$ și $B^2=O_2$ atunci $B=O_2$;

(5p) **c)** Arătați că dacă $C\in C(M)$, $C\neq O_2$ și C are toate elementele raționale, atunci $\det C\neq 0$.

2. Se consideră polinomul $f(x)=x^3-x+a$ cu $a\in\mathbb{R}$.

(5p) **a)** Determinați rădăcinile polinomului știind că $f(-2)=-12$;

(5p) **b)** Calculați $x_1^3+x_2^3+x_3^3$;

(5p) **c)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul f are rădăcini întregi.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(e-e^{\frac{1}{x}})$.

(5p) **a)** Determinați domeniul de definiție D al funcției f;

(5p) **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f;

(5p) **c)** Studiați monotonia funcției f pe D.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n e^x dx$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) **a)** Calculați I_2;

(5p) **b)** Arătați că $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n;

(5p) **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 2

Prof. Alexandru Elena-Marcela

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Calculați modulul numărului complex $z=\dfrac{9-2i}{7+6i}$.

(5p) **2**. Determinați valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=-x^2-2x+6$.

(5p) **3**.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x+\log_2(5-2x)=1$.

(5p) **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr $\overline{xy}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $x\cdot y=12$.

(5p) **5.** Determinați ecuația medianei duse din vârful B al triunghiului ABC, unde A(-2,-1), B(1,2) și C(0,5).

(5p) **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC știind că AB=16 și cos C=$\dfrac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

(5p) **a)** Arătați că $\det A\neq 0$.

(5p) **b)** Calculați E(A), dacă $E(X)=X^2-X+I_3$.

(5p) **c)** Calculați inversa matricei A.

2. Se consideră polinomul $f(x)=x^3-2mx+m+1, m\in\mathbb{R}$.

(5p) **a)** Determinați m astfel încât polinomul $f(x)$ să se dividă cu x-1.

(5p) **b)** Pentru m=2 calculați $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$, unde $x_1,x_2,x_3\in C$ sunt rădăcinile sale.

(5p) **c)** Determinați m astfel încât restul împărțirii polinomului la x+1 să fie egal cu 1.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

(5p) **a)** Determinați soluțiile reale ale ecuației $f^4(x)-2f^2(x)-15=0$.

(5p) **b)** Calculați $f'(x)$.

(5p) **c)** Arătați că *f* este crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx$.

(5p) **a)** Calculați I_1.

(5p) **b)** Arătați că $I_n=\frac{1}{n-1}-I_{n-2},\ (\forall)n\in N$.

(5p) **c)** Calculați $I_{2n+1},\ n\in N$.

Varianta 3

Prof. Alexandru Elena-Marcela

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Determinați numerele reale a și b știind că a+ib este conjugatul numărului complex

$z=\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}$.

(5p) **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^2-6x+5$.

(5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+9^{\frac{x+1}{2}}=36$.

(5p) **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare o pereche (x,y) din produsul cartezian $M\times M$ să avem x+y=5.

(5p) **5.** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care punctele A(1,a), B(4,1) și C(-1,-4) sunt coliniare.

(5p) **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC știind că AC=6 și cos B=$\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$ și $X=\begin{pmatrix}3&5\\x&y\end{pmatrix}$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) **a)** Calculați AX, XA și A+X.

(5p) **b)** Determinați x și y astfel încât AX=XA.

(5p) **c)** Arătați că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (\forall) n \in N$.

2. Se consideră polinomul $f(x) = (m+1)x^2 + 2mx + m + 1, \quad m \in \mathbb{R}$.

(5p) **a)** Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul $f(x)$ este un pătrat perfect.

(5p) **b)** Determinați valorile lui m pentru care polinomul $f(x)$ are extremul în punctul x=2.

(5p) **c)** Arătați că pentru m=2 polinomul $f(x)$ îl divide pe $g(x) = 3x^3 + x^2 - x - 3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

(5p) **a)** Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)^x$.

(5p) **b)** Calculați $f(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(5p) **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe intervalul $(-\infty, -1)$.

2. Se consideră $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = x^n e^{1-x}$, unde n este număr natural nenul.

(5p) **a)** Arătați că, $0 \le f_n(x) \le 1, \quad (\forall)\ x \in [0,1]$.

(5p) **b)** Calculați $\int_0^1 f_1(x)dx$.

(5p) **c)** Dacă $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$, arătați că $I_n = nI_{n-1} - 1, \quad (\forall)\ n \ge 2$.

Varianta 4

Prof: Badea Daniela

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Să se arate că $\log_2\left(5-\sqrt{3}\right) + \log_2\left(5+\sqrt{3}\right) - \log_2 11 = 1$.

(5p) **2.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$. Calculați suma

$S = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(2012)$.

(5p) **3.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^{x^2+x+0,5} - 4\sqrt{2} = 0$.

(5p) **4.** Determinați valorile naturale ale lui x astfel încât $C_{10}^x \le C_{10}^{x-2}$.

(5p) **5.** Dacă $A'(1,-1), B'(3,1)$ și $O(0,0)$ sunt mijloacele laturilor BC, AC și respectiv AB ale ΔABC, determinați coordonatele punctelor A, B, C.

100 variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) **6.** Calculaţi $\cos\alpha$ ştiind că $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $\sin\alpha=\frac{12}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & -1 & 1\\ 1 & x & -1\\ -1 & 1 & x\end{pmatrix}; x\in\mathbb{R}$.

(5p) **a)** Determinaţi x astfel încât $A(x)$ inversabilă;

(5p) **b)** Aflaţi $A^{-1}(1)$;

(5p) **c)** Rezolvaţi ecuaţia $A(1)\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

2. Fie inelul claselor de resturi modulo 6, $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$.

(5p) **a)** Calculaţi suma elementelor neinversabile din $\mathbb{Z}_6$;

(5p) **b)** Determinaţi valorile lui $x\in\mathbb{Z}_6$ astfel încât determinantul matricei $A=\begin{pmatrix} x & \hat{1}\\ \hat{2} & \hat{3}\end{pmatrix}$ să fie element inversabil în $\mathbb{Z}_6$;

(5p) **c)** Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_6$x $\mathbb{Z}_6$ sistemul $\begin{cases}2x+y=4\\ \hat{3}x+2y=\hat{1}\end{cases}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x\left(x^2-5x+7\right)$.

(5p) a) Scrieţi ecuaţia asimptotei spre $-\infty$;

(5p) b) Aflaţi punctele de extrem ale funcţiei;

(5p) c) Demonstraţi că $7\le f(x)\le 3e,\ (\forall)x\in[0,2]$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sin x;\ x<0\\ \frac{x}{x+2};\ x\ge 0\end{cases}$.

(5p) **a)** Calculaţi $\int_{-1}^{1} f(x)dx$;

(5p) **b)** Aflaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei absciselor, a graficului funcţiei $g:[-\pi,0]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$;

(5p) **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 5

Prof: Badea Daniela

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Aflaţi $x\in\mathbb{N}$ astfel încât $2+5+8+....+x=155$.

(5p) **2.** Dacă x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-x+m=0, m\in\mathbb{R}$ aflaţi m ştiind că $|x_1-x_2|=1$.

(5p) **3.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x-1}=5-2x$.

(5p) **4.** Arătaţi că numărul $N=A_{10}^2+C_{10}^2+3P_3$ este divizibil cu 17.

(5p) **5**. Determinaţi valorile reale ale lui x dacă aria ΔABO este 3 ştiind că $A(x,1), B(2x,-1), O(0,0)$.

(5p) **6.** Fie ΔABC şi punctele M, N astfel încât $2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{NC}$. Demonstraţi că

$$\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $M=\left\{A(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

(5p) **a)** Arătaţi că $A(a,b)\cdot A(x,y)=A(ax,ay+bx), (\forall) A(a,b), A(x,y)\in M$;

(5p) **b)** Calculaţi $A^n(a,b)$, $n\in\mathbb{N}^*$;

(5p) **c)** Determinaţi matricele $A(a,b)\in M$ astfel încât $A^{2012}(a,b)=A(1,2012)$.

2. Fie polinomul $f=X^3+aX^2+bX-1\in\mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

(5p) **a)** Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f\vdots(X-1)$ şi restul împărţirii lui f la $X+1$ este -4 .

(5p) **b)** Pentru $b=1$ aflaţi valorile lui a astfel încât $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=x_1^2+x_2^2+x_3^2$;

(5p) **c)** Dacă $a=-1, b=1$ aflaţi valoarea determinantului $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x^2-x-2|$.

(5p) **a)** Studiaţi derivabilitatea funcţiei f ;

(5p) **b)** Stabiliţi monotonia funcţiei f ;

(5p) **c)** Aflaţi ecuaţia asimptotei spre ∞ la graficul funcţiei $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=\sqrt{f(x)}$.

100 variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

2. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\ln x;\ x\in(0,e)\\ x-e+1;\ x\in[e,\infty)\end{cases}$.

(5p) **a)** Arătaţi că f admite primitive pe $(0,\infty)$;

(5p) **b)** Aflaţi aria domeniului plan cuprins între graficul funcţiei $h:\left[e^{-1},1\right]\to\mathbb{R},\ h(x)=x\cdot f(x)$, axa absciselor şi dreptele de ecuaţii $x=e^{-1}, x=1$;

(5p) **c)** Demonstraţi că $\int_1^2 f^{2012}(x)dx\le\frac{1}{2013}$.

Varianta 6

Prof: Badea Daniela

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Aflaţi cardinalul mulţimii $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,|2x-1|\le 3\}$.

(5p) **2.** Determinaţi funcţia de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+ax+b$ ştiind că punctul $A(0,3)\in G_f$ şi axa de simetrie este dreapta $d: x-1=0$.

(5p) **3.** Să se rezolve ecuaţia $\log_3(x^2-2x)=1$.

(5p) **4.** În câte moduri, din 10 elevi poate fi ales un comitet format din 3 elevi?

(5p) **5.** Aflaţi valorile reale ale lui *m* pentru care vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+\vec{j}$ şi $\vec{v}=(m-2)\vec{i}+\vec{j}$ sunt perpendiculari.

(5p) **6.** Calculaţi $S=\cos 0^0+\cos 10^0+\cos 20^0+...+\cos 170^0+\cos 180^0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie matricele $A=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $\mathrm{M}(A)=\{x\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,|\,XA=AX\}$.

(5p) a) Să se arate că $\mathrm{A}^{2012}=2^{1006}\cdot I_2$;

(5p) b) Să se arate că, dacă $X\in\mathrm{M}(A)$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a&2b\\b&a\end{pmatrix}$;

(5p) c) Demonstraţi că $\mathrm{A}+\mathrm{A}^3+\mathrm{A}^5+....+\mathrm{A}^{2011}=(2^{1006}-1)A$ şi

$\mathrm{A}^2+\mathrm{A}^4+\mathrm{A}^6+....+\mathrm{A}^{2012}=2(2^{1006}-1)I_2$.

2. Fie „$*$”: $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ x*y=xy-4x-4y+20,\ (\forall)x,y\in\mathbb{Z}$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) a) Determinaţi elementul neutru al legii „$*$”;
(5p) b) Aflaţi simetricul lui 3 în raport cu legea „$*$”;
(5p) c) Ştiind că legea este asociativă calculaţi $S = 1*2*3*....*2012.$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}.$

(5p) **a)** Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1;$

(5p) **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x);$

(5p) **c)** Demonstraţi că $f(x)\geq 1, (\forall)x>-1.$

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+1.$

(5p) **a)** Arătaţi că orice primitivă a lui f este strict crescătoare.

(5p) **b)** Aflaţi o primitivă a funcţiei f al cărei grafic conţine punctul $A(1,3);$

(5p) **c)** Calculaţi aria suprafeţei cuprinse între axa absciselor, graficul funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(f(x)-3x^2+x\right)\cdot e^x$ şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1;$

Varianta 7

Prof. Badea Ion

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu $a_2=-12,\ a_3=-9.$ Determinaţi $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât suma primilor n termeni să fie zero.

(5p) **2.** Determinaţi elementele mulţimii $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,|\,\dfrac{x^2-7}{x-1}\leq 1\right\}.$

(5p) **3.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1-x}=\dfrac{13}{9}.$

(5p) **4.** Câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu cifrele 0,1,2,3,4?

(5p) **5.** Fie punctele A(3,0), B(-2,-2), C(2,2). Scrieţi ecuaţia dreptei determinată de mijloacele laturilor (CA) şi (CB).

(5p) **6.** Aflaţi raza cercului înscris în triunghiul ABC, de laturi 5, 6 şi 7.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ distincte între ele şi sistemul $(S)\begin{cases}a^2x+ay-z=a^3\\b^2x+by-z=b^3\\c^2x+cy-z=c^3\end{cases}$

(5p) **a)** Calculaţi determinantul matricei *A* ataşată sistemului (S):

(5p) **b)** Rezolvaţi sistemul (S);

(5p) **c)** Dacă (x,y,z) este soluţia sistemului aflaţi soluţiile ecuaţiei $t^3-xt^2-yt+z=0$.

2. Fie polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X], f=(2X+5)^{2012}+4X+10$ şi $g=X^2+5X+6$.

(5p) **a)** Arătaţi că suma coeficienţilor polinomului *f* este un număr întreg divizibil cu 7;

(5p) **b)** Determinaţi restul împărţirii lui *f* la *g*;

(5p) **c)** Calculaţi suma $S=\frac{1}{g(0)}+\frac{1}{g(1)}+\frac{1}{g(2)}+....+\frac{1}{g(2013)}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=e^{2x}+x^2-2.$

(5p) **a)** Să se studieze monotonia funcţiei *f*;

(5p) **b)** Să se demonstreze că funcţia *f* are o singură rădăcină în intervalul (0, 1);

(5p) **c)** Să se demonstreze prin inducţie matematică $f^{(n)}(x)=2^ne^{2x}$, $(\forall)n\in\mathbb{N},n\geq 3$.

2. Fie funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)^2$.

(5p) **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^3}$;

(5p) **b)** Dacă $h:[0,\infty)\to\mathbb{R}, h(x)=\frac{x}{f(x)}$, determinaţi primitiva $H:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei *h* astfel încât $H(0)=-1$;

(5p) **c)** Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei O*x*, a graficului funcţiei f pentru $x\in[0,1]$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 8

Prof. Badea Ion

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Calculaţi $\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+....-\frac{1}{3^{2011}}\right):\left(1-\frac{1}{3^{2012}}\right)$.

(5p) **2.** Aflaţi numerele reale a şi b care au suma 1 şi produsul -12.

(5p) **3.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1$. Aflaţi numerele $x\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $f(\log_2 x)\le 3$.

(5p) **4.** După o ieftinire cu 20% şi apoi o scumpire cu 10% un produs costă 1760 lei. Care este preţul iniţial al produsului?

(5p) **5.** Scrieţi ecuaţia mediatoarei segmentului (AB) unde A(-1,1) şi B(3,3).

(5p) **6.** Calculaţi suma $S=\sin^2 0^0+\sin^2 15^0+\sin^2 30^0+\sin^2 45^0+\sin^2 60^0+\sin^2 75^0+\sin^2 90^0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x-my+z=2m \\ x-2y+z=-2 \\ mx+m^2y-2z=2 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$ şi matricea sistemului

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & m^2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(5p) **a)** Arătaţi că $\det A=4-m^2$

(5p) **b)** Determinaţi valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat

(5p) **c)** Rezolvaţi sistemul pentru m=0;

2. Fie polinomul $f_{a,b}\in\mathbb{R}[X], f_{a,b}=2a^2X^3-2abX^2+b^2X-(2a-1)$

(5p) **a)** Determinaţi numerele întregi a şi b pentru care $f_{a,b}\vdots(X-1)$;

(5p) **b)** Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului $f_{1,1}$, calculaţi $x_1^3+x_2^3+x_3^3$;

(5p) **c)** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2\cdot 8^x-2^{2x+1}+2^x-1=0$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se dă funcţia $f:[-2,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\left(x\sqrt{3}-2\right)^4}{4\sqrt{3}}$.

(5p) **a)** Să se studieze monotonia funcţiei f;

(5p) **b)** Să se demonstreze că tangentele la graficul funcţiei f în punctele $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ şi $B\left(\sqrt{3}, f\left(\sqrt{3}\right)\right)$ sunt perpendiculare.

(5p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{x-\sqrt{3}}}$.

2. Pentru orice număr natural nenul *n* se consideră funcţiile $f_n:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{(x-1)^n}{x+2}$ şi integralele $I_n=\int_{-1}^{1}f_n(x)dx.$

(5p) **a)** Să se calculeze $\int_{-1}^{1}(x+2)f_1(x)dx.$;

(5p) **b)** Să se calculeze I_1;

(5p) **c)** Să se arate că $I_{n+1}+3I_n=\dfrac{(-2)^{n+2}}{n+1},(\forall)n\in\mathbb{N}^*$

Varianta 9

Prof. Badea Ion

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Arătaţi că numărul $N=\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+1-\sqrt{3}$ este natural.

(5p) **2.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x^2+mx+3,m\in\mathbb{R}.$ Determinaţi valorile parametrului real m astfel încât $G_f\cap Ox\neq\Phi.$

(5p) **3.** Aflaţi valorile reale ale lui *x* astfel încât numerele $3^{x+1},9^x,5\cdot3^x-6$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

(5p) **4.** Determinaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $\left\{C_{11}^k\,|\,k\in\mathbb{N},0\le k\le11\right\}$ acesta să fie divizibil cu 11.

(5p) **5.** Care sunt coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC unde A(3,0), B(2,2) şi C(-1,-2)?

(5p) **6.** Fie vectorii $\vec{u}=\left(m^2-1\right)\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\vec{v}=m\vec{i}+\vec{j};m\in\mathbb{R}.$ Aflaţi valorile parametrului real *m* astfel încât vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

(5p) **a)** Calculaţi $\det A$, A^2 şi A^3;

(5p) **b)** Verificaţi egalitatea $A^2=4A-5I_2$ şi demonstraţi că $A^{n+1}=4A^n-5A^{n-1}$, $(\forall)n\in\mathbb{N},n\ge2$;

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) **c)** Arătaţi că $A^n \neq I_2$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinoamele $f = X^8 + X^4 + 1$ şi $g = X^2 + X + 1$, iar x_1 şi $x_2 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului g.

(5p) **a)** Aflaţi restul împărţirii lui f la $g` = X^2 \cdot g$;

(5p) **b)** Calculaţi $x_1^2 + x_2^2$ şi $x_1^3 + x_2^3$;

(5p) **c)** Arătaţi că $f\left(x_1^2\right) + f\left(x_2^2\right) \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f : [-3, \infty) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{3+x} - 2}{x-1}$.

(5p) **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ şi $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$;

(5p) **b)** Demonstraţi relaţia $f^2(x) = -2f'(x) \cdot \sqrt{3+x}$ $(\forall) x \in (-3, \infty) \setminus \{1\}$ şi stabiliţi monotonia funcţiei f

(5p) **c)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = -2$.

2. Se consideră funcţiile

$f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - \sin x \cdot e^{\cos x} - 1$ şi $F(x) = e^{\cos x} + \sin x - x + 1$.

(5p) **a)** Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f;

(5p) **b)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$;

(5p) **c)** Să se calculeze aria suprafeţei plane mărginite de graficul funcţiei $g : \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$,

$g(x) = \dfrac{f(x) - \cos x + 1}{\left(\sin^2 x - 1\right) e^{\cos x}}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = \dfrac{\pi}{4}$.

100 variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 10

Prof: Băşcău Cornelia

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi $\lg 10^6 + \sqrt{10^6} + \sqrt[3]{10^6}$.

(5p) 2. Aflaţi punctele de intersecţie ale graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x-10$ cu axa abciselor.

(5p) 3. Rezolvaţi, în mulţimea numerelor naturale nenule, ecuaţia: $\log_{27}^2 x^3 + 9\log_{27} x = 4$.

(5p) 4. Aflaţi termenul care nu îl conţine pe x în dezvoltarea binomială: $\left(3x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$.

(5p) 5. Fie triunghiul ABC şi vectorii: $\overrightarrow{OA}=2\vec{i},\overrightarrow{OB}=4\vec{i}+2\vec{j},\overrightarrow{OC}=6\vec{i}-4\vec{j}$. Să se determine cordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC.

(5p) 6. Comparaţi numerele $\sin 6$ şi $\sin 7$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. 1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to M_2(\mathbb{R}), f(x)=\begin{pmatrix} x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}$

(5p) a) Să se arate că $f(-1)+f(1)=0_2$.

(5p) b) Să se rezolve ecuaţia $f(2x)=I_2$.

(5p) c) Sa se calculeze $f(2)+(f(2))^2+...+(f(2))^{2014}$

2. Se consideră mulţimea claselor de resturi modulo 9, $\mathbb{Z}_9$

(5p) a) Calculaţi produsul elementelor inversabile din această mulţime.

(5p) b) Calculaţi, in $\mathbb{Z}_9$, suma $\hat{1}+\hat{2}+...+2014$.

(5p) c) Rezolvati, in $\mathbb{Z}_9$, sistemul de ecuaţii: $\begin{cases}\hat{3}x+\hat{2}y=\hat{0}\\ \hat{4}x+\hat{5}y=\hat{1}\end{cases}$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. 1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^{2014}+2014^x-\ln 2014$.

(5p) a) Să se calculeze $f'(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

(5p) b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abcisă 0.

(5p) c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}$.

(5p) a) Să se calculeze $\int_2^4 f(x)\,dx$

(5p) b) Să se arate că orice primitivă F a funcţiei f este concavă pe $[1,\infty)$.

(5p) c) Să se afle volumul corpului mărginit de graficul funcţiei f, axa Ox si dreptele de ecuaţie $x=1$ şi $x=2$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 11

Prof: Băşcău Cornelia

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Aflați conjugatul numarului complex $\frac{-2i}{3-i}$

(5p) 2. Aflați ecuația axei de simetrie a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-10$**.**

(5p) 3. Rezolvați, în $\mathbb{R}$, ecuația: $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}=\lg 100$.

(5p) 4. Știind că prețul unui obiect, după două reduceri succesive de 10%, este 8100, aflați prețul inițial al obiectului.

(5p) 5. Să se determine lungimea laturii NP și raza cercului circumscris triunghiului MNP, dacă $MN=3, m(\sphericalangle P)=30^\circ, m(\sphericalangle M)=45^\circ$

(5p) 6. Să se arate că triunghiul cu vârfurile M(1,6), N(-1,0) şi P(5,-2) este isoscel.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră punctele A(2,1) și $A_n(-n, n)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Să se determine ecuația dreptei A_1A_2.

(5p) b) Să se afle aria triunghiului AA_2A_3.

(5p) c) Să se verifice dacă punctele O, A_n, A_{n+1} sunt coliniare, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x\circ y=2014^{(x+y)}$.

(5p) a) Să se calculeze $2014\circ(-2014)$.

(5p) b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x^2\circ 2x=\frac{1}{2014}$.

(5p) c) Să se arate că dacă $x\circ y\circ z=2014^{z+2014}$, atunci $x+y=1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x-1}{x^2-2x+1}$.

(5p) a) Să se verifice că $f'(x)=\frac{-2x}{(x-1)^2}, x\neq 1$

(5p) b) Să se arate că $f(x)\geq -1, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

(5p) c) Să se determine asimptotele funcției *f*.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}3x^2+2x-1, x\geq 0\\ 2x-1, x<0\end{cases}$.

(5p) a) Să se arate că funcția *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$.

(5p) b) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

(5p) c) Aflați $a\in[0,2]$ astfel încât aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției *f*, axa O*x* si dreptele de ecuații $x=a$ si $x=2$ să fie 9.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 12

Prof: Băşcău Cornelia

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se afle numarul real *x*, ştiind ca x - 3, x si $x+1$ sunt termrnii consecutivi ai unei progresii geometrice.

(5p) 2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}+\sqrt[4]{x^2-6x+9}=x+1$.

(5p) 3. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-2$. Să se rezolve ecuaţia $(f\circ f)(x)-f(x)=0$.

(5p) 4. Să se determine numărul de drepte care trec prin 10 puncte distincte, necoliniare.

(5p) 5. Aflaţi ecuaţia mediatoarei segmentului [AB], unde A(2,3) şi B(3,5).

(5p) 6. Comparaţi numerele cos4 şi cos5.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se considera matricele $A(n)=\begin{pmatrix} e^{\ln n} & \ln e \\ \ln 1 & \ln e \end{pmatrix}, n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Aflaţi urma matricei *A*(*3*)*A*(*4*).

(5p) b) Calculaţi $\det\left(A^3(3)\right)$.

(5p) c) Calculaţi $A^{2014}(1)$.

2. Fie polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_5[x], f(x)=x^4+a, g(x)=x^2+\hat{3}x+\hat{2}, a\in\mathbb{Z}_5[x]$.

(5p) a) Aflaţi rădăcinile polinomului *g*.

(5p) b) Determinaţi $a\in\mathbb{Z}_5[x]$ astfel încât polinomul *g* să dividă polinomul *f*.

(5p) c) Pentru $a=\hat{1}$ arătaţi că polinomul f nu are rădăcini.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se considera functia $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+3}{x-3}$

(5p) a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

(5p) b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^x$

(5p) c) Studiati existenta soluţiilor ecuaţiei $f(x)=m$, unde $m\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră integralele $I_n=\int_e^{e^2} e^{\ln x^n}\ln x\,dx, n\in\mathbb{N}$

(5p) a) Calculaţi I_1.

(5p) b) Calculaţi $I_n, \forall n\in\mathbb{N}$.

(5p) c) Verificaţi egalitatea: $5e^2I_0+20e^2I_1-6e^3=27I_2$

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 13

Prof. Brabeceanu Silvia

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinaţi numărul real x pentru care numerele $2,\ x^2+3x,\ 8$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

(5p) 2. Determinaţi valoarea parametrului real m pentru care punctul $V\left(\frac{3}{4},3m+1\right)$ să fie vârful parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-3x+4$.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2+9\right)=\log_2(5x+15)$.

(5p) 4. Determinaţi câte numere impare $\overline{ab}$ se pot forma ştiind că $a,b\in\{1,2,4,7\}$ şi $a\neq b$.

(5p) 5. Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=-3\vec{i}+(a-2)\vec{j}$ şi $\vec{v}=-\vec{i}+4\vec{j}$ sunt coliniari.

(5p) 6. Rezolvaţi în mulţimea $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ecuaţia $2\cos x-\sqrt{3}=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1&1&1\\m&0&0\\m&2&m\end{pmatrix}$

(5p) a) Calculaţi $\det(A(1))$.

(5p) b) Determinaţi numărul real m ştiind că $A(m)\cdot A(-m)=\begin{pmatrix}-1&3&0\\1&1&1\\-2&3&0\end{pmatrix}$

(5p) c) Calculaţi $(A(1))+(A(2))+\cdots+(A(10))$

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=2xy-6x-6y+21,\forall x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Calculaţi $3*4*(-3)$.

(5p) b) Arătaţi că $x*y=2(x-3)(y-3)+3,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x*x=7$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$.

100 Variante BAC 2014 www.mateinfo.ro

(5p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(1,\infty)$.

(5p) b) Să se verifice că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$.

(5p) c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă $x_0=2$.

2. Se consideră funcţiile $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\ln x-3x$ şi $g(x)=\dfrac{2-3x}{x}$.

(5p) a) Să se arate că f este o primitivă a lui g, $\forall x\in(0,\infty)$.

(5p) b) Să se calculeze $\int f(x)dx$.

(5p) c) Să se calculeze $\int\limits_1^e \dfrac{f(x)}{x}dx$.

Varianta 14

Prof. Brabeceanu Silvia

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine conjugatul numărului complex $z=\dfrac{3-2i}{1+i}+\dfrac{2+3i}{2-i}$.

(5p) 2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ exprimată prin relaţia $f(x)=2^x+x$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+\cdots+f(8)$

(5p) 3. Să se determine numărul real x astfel încât $\log_{\frac{1}{2}}(7+5x)>\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)$.

(5p) 4. Fie mulţimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element $n\in A$ acesta să verifice inegalitatea $n!\geq n^2$.

(5p) 5. Fie vectorii $\overrightarrow{AB}=5\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=-7\vec{i}+5\vec{j}$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$.

(5p) 6. Ştiind că $\sin 15^0-\cos 15^0=a$ să se calculeze valoarea expresiei $\sin 75^0+\cos 75^0-a$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În mulţimea $M_3(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\1&-3&2\\1&-3&2\end{pmatrix}$ şi $X(m)=mA+I_3$.

(5p) a) Calculaţi A^2.

(5p) b) Să se calculeze $M=2\cdot A+2^2\cdot A^2+\cdots+2^{2014}\cdot A^{2014}$.

(5p) c) Să se arate că $X(m)\cdot X(n)=X(m+n)$ şi să se verifice dacă $X(m)$ este inversabilă.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

2. Fie polinomul $f=X^3-aX^2+3X-1\in\mathbb{C}[X]$ cu x_1,x_2,x_3 rădăcini şi a este număr real.

(5p) a) Calculaţi $f(1)-f(-1)$.

(5p) b) Determinaţi restul împărţirii polinomului f la $x-1$, ştiind că restul împărţirii polinomului f la $x+1$ este 3.

(5p) c) Determinaţi numerele reale a pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2=10$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$.

(5p) a) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei.

(5p) b) Să se determine constantele reale a şi b astfel încât funcţia $F(x)=(ax+b)\sqrt{x}$ să verifice condiţia $F''(x)=f(x),\ x\in(0,\infty)$.

(5p) c) Să se determine $x\in(0,\infty)$ astfel încât $x^2\cdot f''(x)+x\cdot f'(x)=\sqrt{x}-1$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$,definit prin $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}dx,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Calculaţi I_1 şi I_2.

(5p) b) Arătaţi că $I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) c) Folosind eventual metoda de integrare prin părţi , arătaţi că $nI_n=\dfrac{1}{2}-\int_0^1\dfrac{x^n}{(1+x)^2}dx,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Varianta 15

Prof. Brabeceanu Silvia

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătaţi că $n=\sqrt{16-6\sqrt{7}}+\sqrt{16+6\sqrt{7}}$ este număr natural.

(5p) 2. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+3$ şi $g(x)=x-3$. Calculaţi $f(g(1))-g(f(1))$.

(5p) 3. Să se rezolve pe mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x-1}+2^{2x-3}-2\cdot 2^{2x-5}=9$.

(5p) 4. 16% din preţul unei mărfi, adică 256 lei reprezintă cheltuieli de transport. Care este preţul acesteia.

(5p) 5. Să se determine unghiul dreptelor $d_1:y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2}$ şi $d_2:y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}$.

(5p) 6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris $\triangle MNP$, $M=\dfrac{\pi}{6}$, $N=\dfrac{\pi}{3}$ şi $MN=4$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În reperul cartezian de coordonate xOy fie punctele $A(m,m)$, $B(2,m-3)$, $C(-3,3m-1)$ și matricea $M=\begin{pmatrix} m & 2 & -3 \\ m & m-3 & 3m-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$, $m\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Calculaţi $\det(M)$.

(5p) b) Verificaţi că pentru orice $m\in\mathbb{R}$ ABC este triunghi.

(5p) c) Pentru $m=4$ să se calculeze aria triunghiului ABC.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-14X^2+48\in\mathbb{R}[X]$.

(5p) a) Să se arate că $f=\left(X^2-7\right)^2-1$.

(5p) b) Să se demonstreze că polinomul nu are rădăcini întregi.

(5p) c) Să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+x+3}$.

(5p) a) Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

(5p) b) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei.

(5p) c) Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

2. Se consideră funcţiile $f:(-3,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+3+\frac{1}{x+3}$ și $F:(-3,\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=\frac{x^2}{2}+3x+\ln(x+3)$.

(5p) a) Calculaţi $\int_0^1 (x+3)f(x)dx$.

(5p) b) Verificaţi dacă funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

(5p) c) Calculaţi $\int_{-2}^{0} F(x)\cdot f(x)dx$,

100 Variante BAC 2014 www.mateinfo.ro

Varianta 16

Prof. Ciocănaru Viorica

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi conjugatul numărului complex $z = (1+ 2i)(2- i)$.

(5p) 2. Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie ale graficelor funcţiilor $f, g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $f(x)= x^2+3x-8$ şi $g(x) = -x-3$.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia iraţională $\sqrt[3]{2x+1} = x+1$.

(5p) 4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 6.

(5p) 5. Se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$. Calculaţi $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

(5p) 6. Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că $C = \frac{\pi}{3}$ şi $AB = 8$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A_p, B_p \in M_3(\mathbf{R})$, $A_p = \begin{pmatrix} 1 & p+1 & p-2 \\ 3p & p+1 & -2 \\ 2p+3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B_p = \begin{pmatrix} 1 & p & p \\ p & p & -2 \\ p & 0 & -4 \end{pmatrix}$ $p\in\mathbf{R}$.

(5p) a) Calculaţi $\mathrm{Tr}(A_0 + A_2^t)$.

(5p) b) Determinaţi CA_0, unde $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(5p) c) Calculaţi $\sum_{p=1}^{n}(A_p - B_p)$, $n\in\mathbf{N}$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbf{R}[X]$, $f = X^3 + aX^2 + X + a$, unde $a\in\mathbf{R}$.

(5p) a) Calculaţi $f(-2)$.

(5p) b) Pentru $a = 2$, determinaţi rădăcinile polinomului f.

(5p) c) Calculaţi $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+4}$.

(5p) a) Calculaţi $f'(x)$ şi $f'(-2)$, $x\in\mathbf{R}$.

(5p) b) Cercetaţi dacă funcţia admite asimptotă oblică.

(5p) c) Determinaţi curbura funcţiei f, oricare ar fi x real.

2. Se consideră funcţia $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_n(x) = x^n e^{-x}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(5p) a) Calculaţi $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f_1(x)dx$.

(5p) b) Stabiliţi o relaţie de recurenţă pentru I_n, cu $I_n = \int f_n(x)dx$, $x\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}^*$ şi aplicaţi relaţia găsită în cazul I_2.

(5p) c) Calculaţi $\lim_{x\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt$.

Varianta 17

Prof. Ciocănaru Viorica

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinaţi numărul real x pentru care numerele 3, $x+1$ şi 12 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice cu termini pozitivi, apoi scrieţi suma termenilor.

(5p) 2. Determinaţi numerele reale nenule a şi b astfel încât funcţia $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $f(x) = ax^2 + bx + 1$ să admită vârful V(1, 2), punct de maxim.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{\sqrt{x^2-4}} = 2^{x-2}$.

(5p) 4. Determinaţi numerele naturale pare $\overline{ab}$ care se pot forma, ştiind că $a, b\in\{4, 5, 6, 7\}$.

(5p) 5. Se consideră dreapta $d: y = \frac{-4x+1}{7}$ şi punctul M (-2, -1). Determinaţi distanţa de la punctul M la dreapta d.

(5p) 6. Transformaţi în produs $E(a) = \sin a - \sin 5a$ şi calculaţi $E(\frac{\pi}{6})$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A\in M_3(\mathbf{R})$ $A = \begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix}$, $p\in\mathbf{R}$.

(5p) a) Calculaţi A^2.

(5p) b) Aflaţi valoarea det $(A - I_3)$ det $(A + I_3)$.

(5p) c) Arătaţi că $A^n = (3p)^{n-1}\cdot A$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $\forall p\in\mathbf{R}$ şi calculaţi A^{2014}.

100 Variante Bac 2014 - www.mateinfo.ro

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^3 - 2X^2 - X + m$ unde m este număr real și ecuația $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

(5p) a) Determinați m, număr real, pentru ca $-\sqrt{2}$ să fie rădăcină pentru f.

(5p) b) Determinați rădăcinile ecuației.

(5p) c) Calculați $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)$ unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuației.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln \dfrac{x+3}{x-3}$.

(5p) a) Determinați D domeniul de definiție al funcției f și cercetați dacă funcția are asimptote verticale.

(5p) b) Calculați $f'(x)$, unde $x \in D$.

(5p) c) Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} xf(x)$.

2. Se consideră funcțiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x$ și $g: [0, \dfrac{\pi}{2}) \to \mathbf{R}$, $g(x) = 2^{tgx}$.

(5p) a) Calculați $\int f^2(x)dx$.

(5p) b) Calculați volumul corpului determinat de rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g(x)/f(x)$ pentru $x \in [0, \dfrac{\pi}{4}]$.

(5p) c) Dacă $I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)dx$, $n \in \mathbf{N}^*$, stabiliți o relație de recurență pentru I_n.

Varianta 18

Prof. Ciocănaru Viorica

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $(\dfrac{2}{5})^{4x-3} > (\dfrac{5}{2})^{2-3x}$.

(5p) 2. Determinați mulțimea soluțiilor inecuației logaritmice $\log_2(\log_{0,5}(x+1)) > 1$.

(5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^3 + 64 = 0$.

(5p) 4. Determinați numărul natural n astfel încât C_n^3, A_n^2 și A_{n+1}^2 să fie termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

(5p) 5. Fie triunghiul ABC cu centrul de greutate $G(4, 3)$, iar $A(3, 6)$ și $B(-2, 3)$. Determinați coordonatele vârfului C al triunghiului.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) 6. Dacă $a\in(\frac{\pi}{2},\pi)$, $b\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$ şi $\sin a=\frac{3}{5}$, $\sin b=-\frac{4}{5}$ calculaţi $\cos a - \cos b$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinanţii $d_1=\begin{vmatrix} a+b & b & a \\ b & a+b & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix}$ şi $d_2(x)=\begin{vmatrix} 1+4x & 9 & x+4 \\ 2+5x & 8 & 2x+5 \\ 3+6x & 8 & 3x+6 \end{vmatrix}$ unde a, b, x sunt numere reale.

(5p) a) Calculaţi d_1 dezvoltând după o linie sau o coloană.

(5p) b) Calculaţi $d_2(0)$.

(5p) c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $d_2(x)=0$, cu ajutorul proprietăţilor determinanţilor.

2. Se consideră mulţimea $M=\{A_x\in M_2(\mathbf{R})\mid A_x=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, x\in\mathbf{R}\}$.

(5p) a) Arătaţi că "$\cdot$" este lege de compoziţie pe M.

(5p) b) Arătaţi că "$\cdot$" este asociativă şi aflaţi $n\in\mathbf{N}$ ştiind că $A_1\cdot A_4\cdot A_9\ldots\cdot A_{n^2}=A_{55}$.

(5p) c) Determinaţi elementele simetrizabile ale lui M.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţiile $f:\mathbf{R}-\{1,2\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}$ şi $g:D\to\mathbf{R}$, $g(x)=\arcsin f(x)$.

(5p) a) Determinaţi ecuaţia tangentei în punctul $M(0,\frac{3}{2})$ la graficul funcţiei f.

(5p) b) Determinaţi D domeniul de definiţie al funcţiei g şi calculaţi $g(-1)$.

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^{3x-g(-1)}$.

2. Se consideră funcţiile $f_n:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f_n(x)=x^n\ln x$.

(5p) a) Calculaţi $\int\frac{f_n(x)}{x^n}dx$.

(5p) b) Calculaţi $\int_e^{e^2}\frac{1}{f_1(x)}dx$.

(5p) c) Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbf{R}$, $g(x)=f_n(x)/x^n$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 19

Prof: Ciocănaru Viorica

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi suma tuturor numerelor naturale de două cifre care se divid cu 7.

(5p) 2. Determinaţi $m \in \mathbf{R}$ pentru ca graficul funcţiei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (m-1)x^2 + 3(m+1)x + 2(m+1)$, să intersecteze axa Ox în două puncte distincte.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia iraţională $\sqrt[3]{2x+1} = x+1$.

(5p) 4. Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbf{N}$ are loc inegalitatea $C_n^3 > C_n^6$?

(5p) 5. Se consideră vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + (a+2)\vec{j}$ şi $\vec{u} = 3\vec{i} + (a-3)\vec{j}$, , cu $a \in \mathbf{R}$. Determinaţi a astfel încât vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{u}$ să fie coliniari.

(5p) 6. Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că $C = \frac{\pi}{3}$ şi $AB = 8$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A_p \in M_3(\mathbf{R})$ $A_p = \begin{pmatrix} 1 & p+1 & p-2 \\ 3p & p+1 & -2 \\ 2p+3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $p \in \mathbf{R}$.

(5p) a) Cercetaţi dacă A_0 este inversabilă, scrieţi $A^t{}_1$, calculaţi Tr $(A_0 + A^t{}_1)$.

(5p) b) Determinaţi A^{-1} pentru $p = 0$.

(5p) c) Calculaţi $\sum_{p=1}^{n} A_p$, $n \in \mathbf{N}$.

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + 3X + 1$, $a,b \in \mathbf{R}$, $g = X^2 + X + 1$.

(5p) a) Determinaţi $a,b \in \mathbf{R}$ dacă $f(1) = 7$ şi $f(-1) = 5$.

(5p) b) Determinaţi $a,b \in \mathbf{R}$ dacă polinomul g divide polinomul f.

(5p) c) Aflaţi coeficienţii a şi b şi celelalte rădăcini ale polinomului f dacă acesta admite rădăcina $1+\sqrt{2}$ şi conjugata ei.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţiile $f: \mathbf{R} - \{1, 2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}$ şi g: D $\to \mathbf{R}$, $g(x) = \arcsin f(x)$.

(5p) a) Determinaţi ecuaţia tangentei în punctul M $(0, \frac{3}{2})$ la graficul funcţiei f.

(5p) b) Determinaţi D domeniul de definiţie al funcţiei g şi calculaţi $g(-1)$.

(5p) c) Calculaţi $\lim_{x \to \infty} (f(x))^{3x - g(-1)}$.

2. Se consideră funcţia $f: (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = ln\ x$.

(5p) a) Calculaţi $\int_1^e xf(x)dx$.

(5p) b) Calculaţi volumul corpului determinat de rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g: [1, e^2] \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x)$.

(5p) c) Dacă $I_n = \int_1^x (\ln t)^n dt$, $t > 0$, $x > 1$, $n \in \mathbf{N}^*$, stabiliţi o relaţie de recurenţă pentru I_n.

Varianta 20

Prof: Ciocănaru Viorica

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinaţi modulul numărului complex $z \in \mathbf{C}$, $z = \frac{3+2i}{1-3i}$.

(5p) 2. Se consideră funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Calculaţi $f(f(1)) + f(f(2)) + \ldots . f(f(12))$.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x} + \sqrt{3-x} = 2$.

(5p) 4. Determinaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale impare de două cifre , acesta să fie divizibil cu 3.

(5p) 5. Se consideră dreapta $d: 2x - 3y + 1 = 0$ şi punctul $A(2, 1)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta d.

(5p) 6. Dacă $a \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ şi $sin\ a = \frac{3}{5}$, calculaţi $ctg\frac{a}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x + my + 2z = 1 \\ x + (2m-1)y + 3z = 1 \\ x + my + (m-3)z = 2m-1 \end{cases}$, $m \in \mathbf{R}$.

(5p) a) Calculaţi d determinantul matricei sistemului şi precizaţi când este nenul.

(5p) b) Cercetaţi compatibilitatea sistemului pentru $m \in \{2; 5\}$.

(5p) c) Rezolvaţi sistemul pentru $m = 1$.

2. Se consideră mulţimea $M = \{A_x \in M_2(\mathbf{R}) \mid A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}\}$.

(5p) a) Arătaţi că „$\cdot$” este lege de compoziţie pe M.

(5p) b) Arătaţi că „$\cdot$” este asociativă şi aflaţi $n \in N$ ştiind că $A_1 \cdot A_4 \cdot A_9 \ldots \cdot A_{n^2} = A_{55}$.

(5p) c) Determinaţi elementele simetrizabile ale lui M.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia f: D $\to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln\dfrac{x+1}{x-1}$.

(5p) a) Determinaţi D domeniul de definiţie al funcţiei f şi asimpotele sale.

(5p) b) Fie $S_n = f(2) + f(3) + ... + f(n)$. Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} S_n$.

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$.

2. Se consideră funcţiile f, g, h: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \int_0^x f(t^2)dt$ şi $h(x) = e^{f(x)}\cos x$.

(5p) a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^3}$.

(5p) b) Determinaţi primitivele funcţiei h.

(5p) c) Dacă $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n f(x)dx$, $n\in\mathbf{N}^*$, calculaţi I_2 şi stabiliţi o relaţie de recurenţă pentru I_n.

Varianta 21

Prof: Ciocănaru Viorica

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi numerele $z = \dfrac{(1+i)^{12}}{i^{2012}}$ şi $\bar{z}$.

(5p) 2. Se consideră ecuaţia $x^2 + ax + b = 0$, cu $x_1, x_2\in\mathbf{R}$ şi $a, b\in\mathbf{Z}$. Arătaţi că $x_1^3 + x_2^3 \in\mathbf{Z}$.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x+1} + 2^{x-1} = 132$.

(5p) 4. Aflaţi valoarea lui $a\in\mathbf{R}$ astfel încât în binomul $(a + \dfrac{1}{2\sqrt{2}})^{11}$, T_9 să fie $\dfrac{165}{2^{11}}$.

(5p) 5. Se consideră punctele A(3, 2) şi B(-2, 4). Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului AB.

(5p) 6. Dacă $tg^2 a = 2$, calculaţi $\cos 2a$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea A$\in M_3(\mathbf{R})$ A $= \begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix}$, $p\in\mathbf{R}$.

(5p) a) Calculaţi A^2.

(5p) b) Aflaţi valoarea det $(A - I_3)$ det $(A + I_3)$.

(5p) c) Arătaţi că $A^n = (3p)^{n-1}\cdot A$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$, $\forall\, p\in\mathbf{R}$ şi calculaţi A^{2012}.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

2. În inelul comutativ $(\mathbf{Z}, *, \circ)$, $x * y = x + y - n$ şi $x \circ y = xy - n(x + y) + n(n + 1)$, $\forall x, y \in \mathbf{Z}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(5p) a) Determinaţi elementul neutru al legii " $\circ$ ", pentru $n = 2$.

(5p) b) Rezolvaţi în $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ sistemul $\begin{cases} x * y = 1 \\ x \circ y = n \end{cases}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(5p) c) Determinaţi $a, b \in \mathbf{Z}$, a nenul, pentru ca funcţia $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism între inelele $(\mathbf{Z}, *, \circ)$ şi $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţiile $f: (\frac{2}{3}, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = ln\,(3x - 2)$, $g: (1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = log_x\,(x+1)$, $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = 2x^2 + x - 3$.

(5p) a) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{h(x)}$.

(5p) b) Fie funcţia $k: D \to \mathbf{R}$, $k(x) = \dfrac{f(x)}{h(x)}$. Calculaţi $k'(x)$ şi stabiliţi domeniul său de derivabilitate.

(5p) c) Arătaţi că g este strict descrescătoare pe $(1, +\infty)$ şi verificaţi inegalitatea $log_5 6 < log_3 4$.

2. Se consideră funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = x^n e^{-x}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(5p) a) Calculaţi $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} f_1(x)dx$.

(5p) b) Stabiliţi o relaţie de recurenţă pentru I_n, cu $I_n = \int f_n(x)dx$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$ şi aplicaţi relaţia găsită în cazul I_2.

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} \int\limits_0^x f_n(t)dt$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 22

Prof. Cristea Maria

100 variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi $\frac{1}{2^{1005}}(1+i)^{2010}$

(5p) 2.Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât tripletul: $\sqrt{x-3}, 1+\sqrt{x-2}, 2+\sqrt{3x-5}$ să constituie termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

(5p) 3. Rezolvaţi ecuaţia $4^x - 2^x - 12 = 0$.

5p) 4. Se consideră mulţimea $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Să se calculeze probabilitatea ca alegând la întamplare o submulţime dintre submulţimile nevide ale mulţimii A aceasta să aibă toate elementele pare.

(5p) 5.Să se determine numărul real m ştiind că vectorii $\vec{u} = (m-3)\vec{i} + 4\vec{j}$ şi $\vec{u} = 8\vec{i} - (15-m)\vec{j}$ sunt perpendiculari.

(5p) 6. Determinaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului cu laturile de lungimi 6,8 , respectiv 10

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

(5p) 1. Fie mulţimea $G = (1,2) \cup (2;+\infty)$ şi legea de compoziţie "* " pe G definită prin $x * y = 1 + (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}$, oricare ar fi $x, y \in G.$.

(5p) a) Să se arate că legea de compoziţie "*" este bine definită.

(5p) b) Să se arate că legea de compoziţie "*" este comutativă.

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia $x * e_1 - 1 = 2$, unde e_1 este elementul neutru a legii de compoziţie "*".

2. Se consideră numărul $a = \frac{\sqrt{10} - i\sqrt{2}}{2}$ şi polinomul $f \in \mathbb{Q}, f = x^4 - 4x^2 + 9$

(5p) a) Să se arate că $f(a) = 0.$

(5p) b) Să se arate că polinomul f reductibil în $\mathbb{R}[x]$ şi în $\mathbb{C}[x]$ şi ireductibil în $\mathbb{Q}[x]$.

(5p) c) Să se calculeze $a_1^6 + a_2^6 + a_3^6 + a_4^6$, unde $a_1^6, a_2^6, a_3^6, a_4^6$ sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţiile

$$f : (-1;+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x) - x \text{ şi } g : (-1,+\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

(5p) a) Să se verifice că $f'(x)=\frac{-x}{1+x}$ şi $g'(x)=\frac{x^2}{1+x}, \forall x>-1$

(5p) b) Să se arate că $f(x)<0<g(x), \forall x>0$

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln(1+\frac{1}{n^2})+\ln(1+\frac{3}{n^2})+\ln(1+\frac{2n-1}{n^2}))$, ştiind că

$$1+3+5+...+(2n-1)^2=n^2 \text{ şi } 1^2+3^2+...+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

2. Se consideră funcţiile

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1+x+x^2+...+x^{2002}$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^1 f(t)dt, \forall x\in\mathbb{R}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

(5p) a) Să se calculeze $f(1)$

(5p) b) Să se arate că $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

(5p) c) Ştiind că funcţia $F(x)$ este bijectivă, să se calculeze $\int_0^a g(x)dx$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ reprezintă inversa funcţiei $F(x)$ şi $a=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2013}$.

Varianta 23

Prof. Cristea Maria

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze $\frac{5}{2}\left(\frac{1}{1-2i}+\frac{1}{1+2i}\right)$.

(5p) 2. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât tripletul: $3x-1, x+3, 9-x$ să constituie termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

(5p) 3. Rezolvaţi ecuaţia $10^x+4^x-2\cdot 25^x=0$.

(5p) 4. Se consideră mulţimea A={1,2,3,4,5,6} . Să se calculeze probabilitatea ca alegând la întamplare o submulţime dintre submulţimile nevide ale mulţimii A aceasta să aibă cel puţin 3 elemente.

(5p) 5. Să se determine numărul real m ştiind că vectorii $\vec{u}=(m-3)\vec{i}+4\vec{j}$ şi $\vec{u}=8\vec{i}-(15-m)\vec{j}$ sunt coliniari.

(5p) 6. Determinaţi raza cercului circumscris triunghiului cu laturile de lungimi 7, 5, respectiv 6.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Definim pe $\mathbb{R}$ legea de compoziţie "*" prin $x*y=3xy-6x-6y+14(x,y\in\mathbb{R})$

(5p) a) Arătaţi că legea de compoziţie este bine definită.

(5p) b) Demonstraţi că $((\mathbb{R},*)$ este monoid comutativ.

(5p) c) Rezolvaţi ecuaţia $x*x*x=11$.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{Q}$ şi funcţia polinomială $f(x)=x^3+x^2+ax+b.$.

(5p) a) Să se determine a,b ştiind că $1-i$ este rădăcină a funcţiei f .

(5p) b) Să se determine tóate rădăcinile funcţiei $f(x)$ ştiind că $1+\sqrt{x}$ este una dintre rădăcinile acesteia.

(5p) c) Să se determine a,b ştiind că ştiind ca funcţia f are o rădăcină triplă .

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_0(x)=xe^x$ şi $f_{n+1}(x)=f_n\,'(x),\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R}.$

(5p) a) Să se rezolve ecuaţia $f_2(x)=0$.

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)},n\in\mathbb{N}^*$

(5p) c) Să se determine asimptota la graficul funcţiei f_0 către $-\infty$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(1+x)-x$, şi şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, definit prin $I_n=\int$

$$I_n=\int_0^1\left(\frac{x^n}{2004+x^n}\right)dx,\forall x\in\mathbb{N}^*.$$

(5p) a) Să se calculeze $f\,'(x)$, $x>-1$.

(5p) b) Utilizând metoda integrării prin părţi, să se arate că

$$I_n=\frac{1}{n}\ln\frac{2005}{2004}-\frac{1}{n}\int_0^1\ln(2004+x^n)dx,\forall n\in\mathbb{N}^*\quad .$$

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n$, unde $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^n}dx.$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 24

Prof: Dobre Andrei Octavian

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.**Soluţia ecuaţiei (x+1)+(x+4)+(x+7)+...+(x+28)=155

(5p) **2.**Să se determine mulțimea tuturor parametrilor reali m pentru care $(m-1)x^2+mx+m+1>0$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$

(5p) **3.** Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația $\ln(e^x-1)+\ln(e^x+1)=1$

(5p) **5.** Fie punctele A(0,2), B(4,6), C(8,10) . Daca punctul A' este simetricul lui A faţă de BC, aflaţi lungimea segmentului AA'.

(5p) **6.** În triunghiul ABC avem BC=4, AC=2 si AB = 6. Dacă M este mijlocul segmentului [BC] aflaţi $m(\sphericalangle BAM)$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -10 & -4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M=\{X(a)/a\in\mathbb{R}, X(a)=I_2-a\cdot A\}$

(5p) **1.** Calculați A^2-A.

(5p) **2.** Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b-ab)$.

(5p) **3.** Să se calculeze $X(0)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot\ldots\cdot X(2014)$

2. Definim pe $\mathbb{R}$ legea de compozitie " * " prin $x*y=\log_{2014}(2014^x+2014^y)$ $(x,y\in\mathbb{R})$

(5p) **a)** Arătați ca legea "*" este asociativa, dar nu admite element neutru.

(5p) **b)** Demonstrați că $2014+(y*z)=(2014+y)*(2014+z)$, oricare ar fi $y,z\in\mathbb{R}$

(5p)**c)** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x*x*x=x\log_{2014}6042$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\sqrt{x^2+x}$.

(5p) **a)** Calculați $f'(x)$

(5p) **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f

(5p) **c)** Să se determine ecuațiile asimptotelor către $-\infty$ la graficul funcției f

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră $I_n=\int_0^1\frac{1}{(x^2+1)^n}dx$.

(5p) **a)** Să se arate că $I_0+I_1=\frac{\pi+4}{4}$

(5p) **b)** Să se arate că $I_2=\frac{\pi+2}{8}$

(5p) **c)** Să se demonstreze că $I_n<I_2$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$

100 variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 25

Prof: Dogaru Ion

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1. Rezolvaţi ,în mulţimea numerelor reale,ecuaţia $\frac{2x-1}{x+3}-\frac{x-3}{2x-1}=\frac{26}{3}$.

5p 2. Să se determine $a>0$ ştiind că termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^{12}$ este egal cu 2012.

5p 3. Să se determine ecuaţia medianei duse din vârful A al triunghiului ABC ştiind că A(3,2), B(-2,3) şi C(6,-5).

5p 4. Să se calculeze $tg1^0 tg2^0 \cdots tg89^0$.

5p 5. Fie mulţimea $A=\{\pm1,\pm2,\pm3,0\}$ şi o funcţie bijectivă $f:A\to A$. Să se calculeze suma $f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$.

5p 6. Rezolvaţi ,în mulţimea numerelor reale,ecuaţia $\lg^2 x-7\lg x=30$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru $x\in\mathbf{R}$, se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}4 & -7 & 0\\ 2 & -4 & 0\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}$

5p a) Rezolvaţi ecuaţia $det\ A = 2012$.

5p b) Pentru $x=\sqrt{2}$ calculaţi $A^n, n\in\mathbf{N}^*$.

5p c) Determinaţi numerele reale t pentru care $det(t^2A) = t^2 detA$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

2. Se consideră $a,b\in\mathbf{R}$ şi polinomul $f=2X^4+9X^2+aX+b$ care are rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3, x_4

5p a) Să se determine a şi b ştiind că f are rădăcina $\boldsymbol{i}$.

5p b) Să se calculeze $(x_1-3/2)^2+(x_2-3/2)^2+(x_3-3/2)^2+(x_4-3/2)^2$.

5p c) Să se determine a şi b ştiind că f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2-4}, \forall x\in\mathbf{R}$.

5p a) Să se determine asimptotele graficului funcţiei f.

5p b) Să se arate că $f^2(x)f'(x)=x^2+2x, \forall x\in\mathbf{R}\setminus\{-2,1\}$

5p c) Să se determine derivatele laterale ale graficului funcţiei f în punctual $x_0 = -2$

2. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^3-3x+2$.

5p a) Să se calculeze $\int_2^3 \frac{f(x)}{x-1}dx$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-13}{f(x)}dx$.

5p **c)** Să se determine valorile f_{min} , respectiv f_{max} .

Varianta 26

Prof: Dogaru Ion

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculaţi $(1+i)^{2012}-(1-i)^{2012}$.

5p **2.** Rezolvaţi, în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $\sqrt{11x+4}=x+2$.

5p **3.** În mulţimea $[0,2\pi]$ rezolvaţi ecuaţia $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos x$.

5p **4.** Se consideră mulţimile A = {1,2,3,4} şi B = {±1,±2,±3}. Să se determine numărul funcţiilor strict crescătoare $f : A \to B$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele A(3,-2), B(-5,4). Să se determine ecuaţia mediatoarei segmentului [AB].

5p **6.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Ştiind că $a_6 + a_{16} = 2012$, calculaţi $a_3 + a_{19}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Pentru $m \in \mathbf{R}$ se consideră matricea $M = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 2m-1 & 3 & 1 \\ m & m-3 & 1 \end{pmatrix}$ şi punctele A(m,2), B(2m-1,3), C(m,m-3).

5p **a)** Determinaţi $m \in \mathbf{R}$ pentru care rangM = 2.

5p **b)** Determinaţi $m \in \mathbf{R}$ pentru care punctele A,B,C sunt necoliniare.

5p **c)** Pentru $m \in [1,5]$ determinaţi valoarea maximă a ariei triunghiului ABC.

2. Se consideră: mulţimea G = (-1,1), legea de compoziţie dată prin $x * y = \frac{x+y}{1+xy}, \forall x, y \in G$ şi funcţia $f : G \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

5p **a)** Arătaţi că G este parte stabilă faţă de legea de compoziţie $*$.

5p **b)** Arătaţi că $\forall x, y \in G$, $f(x*y) = f(x)\cdot f(y)$.

5p **c)** Ştiind că legea de compoziţie $*$ este asociativă, să se calculeze $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \cdots * \frac{1}{9}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : R \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 2x + 5arctg\, x$.

5p **a)** Arătaţi că funcţia *f* este strict crescătoare pe **R**.

5p **b)** Arătaţi că funcţia *f* este bijectivă.

5p **c)** Determinaţi $m \in \mathbf{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^m}$ există, este finită şi nenulă.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n>0}$ dat de : $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

5p a) Să se calculeze I_2 .
5p b) Să se demonstreze că şirul $(I_n)_{n>0}$ este convergent.
5p c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 27

Prof: Dogaru Ion

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1. Să se calculeze partea întreagă a numărului $(\sqrt{5}+\sqrt{11})^2$.

5p 2. Rezolvaţi,în mulţimea **R×R,** sistemul $\begin{cases} x^2+y^2-xy=13 \\ x+y=7 \end{cases}$.

5p 3. Să se determine $x \in \mathbf{N}$, $x > 1$ astfel încât $2C_x^{x-2} + A_x^2 = 1524$.

5p 4. Să se determine probabilitatea ca alegând un element al mulţimii divizorilor naturali ai numărului 2012, acesta să fie divizibil cu 2.

5p 5. Să se calculeze modulul vectorului $\vec{u}+\vec{v}$ ştiind că $\vec{u} = -7\vec{i} + 4\vec{j}$ şi $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$.

5p 6. Să se calculeze tgx , ştiind că $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ şi $\sin 2x = -\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5p a) Calculaţi rangul matricei A^*, adjuncta matricei A.
5p b) Arătaţi că $A^3 = 10A$.
5p c) Rezolvaţi ecuaţia $AX = B$, unde $X \in M_{3,1}(\mathbf{C})$

2. Se consideră polinomul $f \in C[X]$, $f = (X+i)^{100} + (X-i)^{100}$,care are forma algebrică $f = a_{100}X^{100} + a_{99}X^{99} + ... + a_1X + a_0$.

5p a) Să se calculeze $a_{100} + a_{99}$.
5p b) Să se determine restul împărţirii polinomului f la $X^2 - 1$.
5p c) Să se demonstreze că f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră functia f : **R** → **R**, dată prin $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x + m$.
5p a) Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
5p b) Determinaţi intervalele de concavitate ale funcţiei f.
5p c) Determinaţi valorile reale ale parametrului m pentru care ecuaţia $f(x) = 0$ are trei rădăcini reale distincte.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$, se consideră funcţia $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = (1 - x)^n$.

5p a) Să se calculeze aria subgraficului funcţiei f_n.

5p b) Să se arate că $\int_0^1 x f_n(x)dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(\frac{x}{n})dx$.

Varianta 28

Prof. Gaga Loghin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Calculați ε^3

(5p) 2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4(3m+1)x + 5, m \in \mathbb{R}$. Să se determine cel mai mare m astfel încât funcția să aibă un maxim egal cu 6.

(5p) 3. Rezolvați, în $\mathbb{R}$, ecuația $\sqrt{3x^2 - 4x - 15} = x - 2$

(5p) 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \left\{ \sqrt[3]{n} \middle| n \in \mathbb{N}, n < 100 \right\}$, acesta să fie rațional.

(5p) 5. Se consideră punctele $A(5,6), B(-1,-2), C(6,5)$. Determinați coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

(5p) 6. Calculați produsul $P = \cos 1^0 \cdot \cos 2^0 \cdot \cos 3^0 \cdot \ldots \cdot \cos 179^0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Pentru orice $x \in \mathbb{C}$ se definește matricea $V(x) = A + xI_3$ și funcția polinomială $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(x) = \det V(x)$.

(5p) a) Determinați rangul matricei A;

(5p) b) Rezolvați, în $\mathbb{R}$, ecuația $f(x) = 1$

(5p) c) Există o matrice $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{C})$, cu proprietatea $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$? Justificați.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

2. În $\mathbb{Z}$, se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-3$ și $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$

(5p) a) În $\mathbb{Z}$, să se rezolve ecuația $x*x=x\circ x$.

(5p) b) Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ astfel încât relația $x\circ a=3$ să aibă loc, oricare ar fi x, întreg.

(5p) c) Rezolvați sistemul $I_1=$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

(5p) a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

(5p) c) Să se studieze concavitatea funcției $f(x)$, pe intervalul $(-1,+\infty)$

2. Se consideră $I_n=\int_e^{e^2} x\ln^n x\,dx,\ n\in\mathbb{N}$

(5p) a) Să se calculeze I_1

(5p) b) Să se arate că $I_n\le I_{n+1}, \forall x\in\left[e,e^2\right], n\in\mathbb{N}$

(5p) c) Să se calculeze o formulă de recurență pentru integrala I_n

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 29

Prof. Gaga Loghin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se arate că numărul $\left(1-i\sqrt{3}\right)^3 \in \mathbb{Z}$

(5p) 2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $ax^2+(3a-1)x+a+3=0$ are soluții reale.

(5p) 3. Să se arate că ecuația $\log_2\left(\log_3(x-16)\right)=1$ are soluție un număr întreg, pătrat perfect.

(5p) 4. După o reducere de 20% și o scumpire cu 15%, prețul unui produs devine 575 lei. Aflați prețul inițial.

(5p) 5. În reperul cartezian xOy, se consideră punctele $A(1,2), B(5,6), C(-1,1)$. Determinați ecuația înălțimii din C, în acest triunghi.

(5p) 6. Determinați valoarea maximă a expresiei $E(x)=\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$

(5p) a) Să se scrie matricea A, a sistemului și să se calculeze $\det A$.

(5p) b) Să se calculeze rangul matricei A, după valorile parametrului real, a. Poate fi rangA=2?

(5p) c) Pentru $a \neq 1$, să se rezolve sistemul.

2. Se consideră inelul $(Z_5,+,\cdot)$, unde $Z_5=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$

(5p) a) Să se rezolve ecuația $\hat{2}x+\hat{4}=\hat{3}$, în Z_5.

(5p) b) Să se calculeze, în Z_5, determinantul $\begin{vmatrix} \hat{1} & 3 & \hat{4} \\ \hat{2} & \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{3} \end{vmatrix}$

(5p) c) Să se rezolve, în $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$, sistemul $\begin{cases} \hat{3}x+y=\hat{4} \\ x+\hat{2}y=\hat{3} \end{cases}$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x-2}$

(5p) a) Pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, să se calculeze $f'(x)$

(5p) b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f

(5p) c) Să se determine coodonatele punctelor de extrem ale graficului funcției f și punctele de inflexiune, dacă există.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}dx$

(5p) a) Calculați $\displaystyle\int \frac{x^n}{x^4+1}dx$, pentru n=3

(5p) b) Calculați I_1 și I_3.

(5p) c) Demonstrați că $I_2\in\left(\dfrac{\ln 2}{4},\dfrac{\pi}{8}\right)$

Varianta 30

Prof. Gaga Loghin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie ecuația $x^2-mx-1=0$, $m\in\mathbb{R}$, cu soluțiile x_1 și x_2. Să se determine parametrul real m, astfel încât $x_1^2+x_2^2=x_1+x_2+2$

(5p) 2. Se consideră șirul $x_n=2n-1, n\in\mathbb{N}^*$. Cât trebuie să fie valoarea lui n, astfel încât să existe relația $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=2014^2$

(5p) 3. Determinați soluțiile ecuației $\sqrt{3}\cdot\sin x-\cos x=1,\ x\in[0,2\pi]$

(5p) 4. Să se determine TVA-ul adăugat unui produs, știind că prețul de vânzare (prețul cu TVA) este 372 lei, iar TVA-ul este 24% din prețul inițial al produsului.

(5p) 5. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overline{u}=a\overline{i}+(a-1)\overline{j}$ și $\overline{v}=3\overline{i}-(3a-1)\overline{j}$ să fie perpendiculari.

(5p) 6. Să se calculeze suma $S=\sin^2 1^0+\sin^2 2^0+\cdots+\sin^2 90^0$

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$

(5p) a) Să se calculeze A^3

(5p) b) Să se determine rangul matricei $A+A^t+I_3$

(5p) c) Să se determine inversa matricei $A+I_3$

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+X+b;$.

(5p) a) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $g(X)=X^2-1$.

(5p) b) Să se determine polinomul f, știind că una dintre rădăcinile acestuia este $x_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(5p) c) Pentru $a=-4$, folosind polinomul f determinat la b), să se determine $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-x+1}{x+1}$.

(5p) a) Să se studieze monotonia funcției f.

(5p) b) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,\infty)$

(5p) c) Să se arate că, pentru $a,b\in(-1+\sqrt{3},\infty), f(\sqrt{ab})\le f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{f(a)+f(b)}{2}$

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^3}dx$

(5p) a) Să se calculeze I_2

(5p) b) Să se arate că șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este strict descrescător

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 31

Prof: Gaga Loghin.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculați produsul numerelor complexe $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\cdots\cdot i^{20}$.

(5p) 2. Verificați dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+x-2012$ este injectivă

(5p) 3. Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $16^x+5\cdot 4^{x+1}-21=0$

(5p) 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre,
acesta să aibă exact două cifre egale.

(5p) 5. În sistemul de axe de coordonate xOy, se consideră punctele: $A(2,5), B(-3,4), C(7,-2)$.
Scrieți ecuația medianei corespunzătoare laturii BC

(5p) 6. Fie $a\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ și $\cos a=-\frac{4}{5}$. Calculați $tg\frac{a}{2}$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră matricea $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ m & 1 & 0\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}$, $m\in\mathbb{R}$ și sistemul de ecuații

$$\begin{cases}x+y+z=3\\ mx+y=-1\\ x+y+mz=3\end{cases},\ x,y,z\in\mathbb{R}$$

(5p) a) Să se calculeze determinantul matricei M
(5p) b) Să se rezolve sistemul, ştiind că m=1
(5p) c) Să se studieze în ce condiții sistemul este incompatibil

2. Fie mulțimea $M=(a,\infty)$ o mulțime de numere reale și legea de compoziție, definită pe $\mathbb{R}$,
$x*y=2xy-4x-4y+5a$

(5p) a) Să se arate că, pentru orice $a\geq 2$, mulțimea **G** este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația $*$.

(5p) b) Să se determine a, ştiind că $(G,*)$ este grup abelian

(5p) c) Să se arate că grupurile $(G,*)$ și $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ sunt izomorfe prin funcția
$f:G\to\mathbb{R}_+^*, f(x)=2x-4$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) a) Să se calculeze $f'(x)$ și $f''(x)$

(5p) b) Să se determine intervalele de monotonie și cele de convexitate ale funcției f.

(5p) c) Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)+g(x^2)+\cdots+g(x^{2011})+x^{2013}}{x^{2012}}$$

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx$

(5p) a) Să se calculeze I_0 și I_1

(5p) b) Să se arate că $\frac{1}{2(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{2(n-1)},\forall n\geq 2$

(5p) c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(nI_n-\frac{1}{3}\right)$

Varianta 32

Prof: Gaga Loghin.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine primul termen al progresiei geometrice $b_1,7,b_3,28,\cdots$

(5p) 2. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=5^x+\log_5 x$. Să se determine $f(f(1))$

(5p) 3. Se consideră dezvoltarea binomială $\left(2012\sqrt[4]{x}+\frac{2012}{\sqrt{x}}\right)^9, x>0$. Să se dedetermine termenul liber al dezvoltării.

(5p) 4. Se consideră mulţimea *M* a tuturor funcţiilor definite pe *A* ={2010, 2011, 2012}cu valori în *B*={1, 2, 3}. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o funcţie din mulţimea *M*, aceasta să fie injectivă .

(5p) 5. Se consideră punctele A(-2,3), B(3,m), C(2,4)și D(n,5). Să se determine $m,n\in$ **R** astfel încât patrulaterul *ABCD* să fie paralelogram .

(5p) 6. Fie ABC un triunghi, cu tgA=2, $tgB=\frac{8-5\sqrt{3}}{11}$. Să se determine măsura unghiului C

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, de ordin 3, cu elemente din mulțimea numerelor reale.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) a) Să se verifice dacă $A^3 - A = A^2 - I_3$

(5p) b) Să se arate că $A^n - A^{n-2} = A^2 - I_3,\ \forall n \in N, n \geq 3$

(5p) c) Să se arate că suma elementelor matricei A^n este n+3

2. Fie polinomul $p(X) = X^3 + aX^2 + X + b, a, b \in \mathbb{Z}$ și rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$

(5p) a) Să se afle rădăcinile polinomului p, pentru a=b=1

(5p) b) Să se determine a și b, știind că o rădăcină a polinomului este $x = i$.

(5p) c) Știind că b=1, să se determine a știind că polinomul admite o rădăcină rațională

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-3,3) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln \frac{x+3}{3-x}$.

(5p) a) Să se calculeze $f'(x)$ și să se determine intervalele de monotonie

(5p) b) Să se determine asimptotele funcției f

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 0},\ I_n = \int_0^1 \frac{\ln(x^n + 1)}{x^2 + 1} dx, n \in \mathbb{N}^*$

(5p) a) Să se calculeze I_0.

(5p) b) Să se studieze monotonia șirului

(5p) c) Folosind, eventual relația $\ln(1+t) \leq t$, să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} I_n = 0$

Varianta 33

Prof. Ionescu Maria

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi suma tuturor numerelor naturale mai mici decât 100 care sunt divizibile cu 5.

(5p) 2. Să se rezolve ecuaţia $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 117$.

(5p) 3. Calculaţi numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $\left(1 + \sqrt[3]{2}\right)^{20}$.

(5p) 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr de trei cifre cu elemente din mulţimea {0,1,2,3}, acesta să fie număr par.

(5p) 5. Să se determine numărul real *m* astfel încât dreptele $d_1 : 3x - 2y + 5 = 0$ şi $d_2 : 4x + my - 2 = 0$ să fie paralele.

(5p) 6. Calculaţi lungimea medianei din A corespunzătoare triunghiului ABC determinat de punctele A(4,3), B(2,5) şi C(-2,-1).

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră punctele A(3,2) B(1,5) şi C(-*n*,*n*), unde $n \in N^*$

(5p) a) Pentru *n=1* să se scrie ecuaţia dreptei AC;

(5p) b) Să se demonstreze că punctele A, B, C nu pot fi coliniare, $\forall n \in N^*$ **;**

(5p) c) Să se determine $n \in N^*$ astfel încât aria triunghiului ABC să fie 10.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie:

$x * y = 6xy - 5(x + y) + 5, \forall x, y \in R$

(5p) a) Să se demonstreze asociativitatea legii de compoziţie;

(5p) b) Să se determine simetricul lui 2 în raport cu legea de compozitie " * " ;

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia $x * x * x = x, \forall x \in R$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : R \to R, f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

(5p) a) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1}$;

(5p) b) Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei *f* ;

(5p) c) Determinaţi numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $f(x) = m,$ dacă $m \in (-2, 2)$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n \in N^*}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{x + 2014} dx, \forall n \in N^*$

(5p) a) Calculaţi I_1

(5p) b) Să se arate că şirul $(I_n)_{n \in N^*}$ verifică relaţia $I_{n+1} + 2014 I_n = \dfrac{1}{n+1}, \forall n \in N^*$

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} nI_n$

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 34

Prof. Ionescu Maria

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze modulul numărului complex $z=1+i+i^2+...+i^{10}$.

(5p) 2. Să se determine $m\in R$ astfel încât $x^2-mx+9>0,\forall x\in R$.

(5p) 3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-4x+3}=x-1$.

(5p) 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulţimii A={0,1,2,...,10}, acesta să verifice inegalitatea $n!<100$.

(5p) 5. Se consideră dreptele de ecuaţii $d_1:2x-3y+5=0$ şi $d_2:ax+6y-1=0$ .Să se determine numărul real a astfel încât drepetele să fie perpendiculare.

(5p) 6. Să se calculeze $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii : $\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+my+z=2 \\ mx+y+z=3 \end{cases}, m\in R$.

(5p) a) Să se determine $m\in R$ pentru care detrminantul matricei este nul;

(5p) b) Pentru $m=0$ să se rezolve sistemul de ecuaţii;

(5p) c) Să se discute în funcţie de $m\in R$ rangul matricei sistemului.

2. Se consideră polinomul $f\in Z_4[X]$, $f=X^3+aX+b$

(5p) a) Să se determine numărul polinoamelor f de această formă;

(5p) b) Pentru $a=b=\hat{2}$ să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul $X+\hat{2}$;

(5p) c) Pentru $b=\hat{1}$ să se determine $a\in Z_4$ astfel încât polinomul f să nu admită rădăcini în $Z_4[X]$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R/\{2014\}\to R, f(x)=\dfrac{x}{x-2014}$.

(5p) a) Să se demonstreze că f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0)$

(5p) b) Să se determine asimptotele graficului funcţiei f ;

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^x$

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

2. Se consideră funcţiile $f:(0,\infty)\to R, f(x)=\ln x+1$ şi $g:(0,\infty)\to R, g(x)=x\ln x$

(5p) a) Să se arate că funcţia g este o primitivă a funcţiei f ;

(5p) b) Calculaţi $\int_1^e f(x)\cdot g(x)dx$

(5p) c) Să se arate că $e-1\le\int_1^e f(x)dx\le 2(e-1)$

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 35

Prof. Ionescu Maria

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi $\log_{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt{6}\right)^{-2}$.

(5p) 2. Să se determine funcţia de gradul al doilea $f:R\to R$ care este tangentă la axa OX şi trece prin punctele $A(0,-4)$ şi $B(1,-1)$.

(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia $\lg^2 x^2-20\lg x+24=0$.

(5p) 4. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibe produsul cifrelor egal cu 6.

(5p) 5. Calculaţi lungimea înălţimii din C a triunghiului ABC determinat de punctele $A(3,0)$; $B(0,4)$ şi $C(3,4)$.

(5p) 6. Ştiind că $\sin x=-\frac{1}{2}$, să se calculeze $\cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&4\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

(5p) a) Să se arate că $A^2-6A+8I_2=O_2$;

(5p) b) Să se determine matricea $X\in M_2(C)$ astfel încât $A\cdot X=X\cdot A$

(5p) c) Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $Y^2=A$, în mulţimea $M_2(C)$

2. Se consideră polinomul $f\in R[X]$, $f=X^4-2014X^2+2013$

(5p) a) Să se calculeze $x_1+x_2+x_3+x_4$;

(5p) b) Să se determine rădăcinile reale ale polinomului f ;

(5p) c) Calculaţi $(x_1+2)(x_2+2)(x_3+2)(x_4+2)$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R\to R, f(x)=\ln(x^2+1)$

(5p) a) Să se studieze monotonía funcţiei f .

(5p) b) Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcţiei f.

(5p) c) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcţiei f .

2. Se consideră funcţia $f:R\to R, f(x)=\sqrt{x^2+2014}$

(5p) a) Calculaţi $\int_{11}^{102} f(\sqrt{x})dx$;

(5p) b) Să se arate că $\int_{1}^{11}\frac{x}{f^2(x)}dx=\ln\frac{45}{\sqrt{2015}}$;

(5p) c) Să se arate că orice primitivă F a funcţiei f este strict crescătoare pe R.

Varianta 36

Prof. Isofache Cătălina Anca

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi partea imaginară a numărului: $(1+i)^{2014}$.

(5p) 2. Rezolvaţi în RxR sistemul de ecuaţii: $\begin{cases}x^3+y^3=9\\ x+y=3\end{cases}$.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $\log_2 x+\log_x 2=\frac{5}{2}$.

(5p) 4. Calculaţi numărul funcţiilor strict monotone $f:\{1;2;3;4\}\to\{1;2;3;4;5;6\}$.

(5p) 5. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $2\sin x+\cos 2x=1$.

(5p) 6. Calculaţi aria triunghiului ABC, dacă A(1;2);B(-1;-2) şi C(0;-2).

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

100 variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

1. Se consideră sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} ax+by+cz=a \\ bx+cy+az=b \\ cx+ay+bz=c \end{cases}$;a,b,c$\in R^*$,cu necunoscutele (x,y,z)$\in R^3$.

(5p) a) Arătaţi că determinantul sistemului este Δ=(a+b+c)(-a^2$-b^2-c^2+ab+bc+ca$).

(5p) b) Rezolvaţi sistemul in cazul în care acesta este compatibil determinat.

(5p) c) Dacă $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$ şi $x^2+y^2+xy=0$,demonstraţi că sistemul are soluţie unică.

2. Se consideră mulţimea G=$\left\{\begin{pmatrix} x & 5y \\ -y & x \end{pmatrix} / x, y \in Z\right\}$.

(5p) a) Arătaţi că,pentru orice A,B$\in G$ rezultă A+B$\in G$ şi AB$\in G$.

(5p) b) Dacă A,B$\in G$ şi AB=O_2 ,demonstraţi că A=O_2 sau B=O_2.

(5p) c) Calculaţi elementele inversabile ale inelului (G;+;·).

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R\to R$, f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4).

(5p) a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^4}$.

(5p) b) Arătaţi că ecuaţia $f'(x)=0$ are trei rădăcini reale distincte.

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{\frac{1}{x}}$.

2. Se consideră şirurile $I_n=\int_{-3}^{3} x^n\sqrt{9-x^2}\,dx$ şi $J_n=\int_{-1}^{1} x^n\sqrt{9-x^2}\,dx$,unde n$\in N$

(5p) a) Calculaţi I_1 şi I_2.

(5p) b) Demonstraţi că $I_{2n+1}=0$,pentru orice n$\in N$.

(5p) c) Calculaţi J_{2n+2} în funcţie de J_{2n}.

100 Variante BAC 2014 www.mateinfo.ro

Varianta 37

Prof. Isofache Cătălina Anca

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi $\left|z^3\right|+\left|\overline{z}^{-3}\right|$,dacă $z=-i+\sqrt{3}$.

(5p) 2. Determinaţi mulţimea punctelor de intersecţie dintre graficele funcţiilor $f:R\to R$, $f(x)=2x^2-3x+1$ şi $g:R\to R$, g(x)=2-2x.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $9^x-18\cdot 6^{x-1}+2^{2x+1}=0$.

(5p) 4. Calculaţi rangul termenului ce nu conţine x din dezvoltarea binomului: $\left(x+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{100}$.

(5p) 5. Determinaţi valorile parametrului real m, ştiind că dreptele de ecuaţii (m+1)x-2y-5=0 şi 4x-(m-1)y+7=0 sunt paralele.

(5p) 6. Calculaţi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$,unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 1 & a^2 & b^2\\ 1 & a^3 & b^3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ bc & ac & ab\\ a^2 & b^2 & c^2\end{pmatrix}$.

(5p) a) Arătaţi că detA=ab(a-1)(b-1)(b-a) şi detB=(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c).

(5p) b) Demonstraţi că $\det(A\cdot {}^TA)\geq 0$,unde ${}^TA$ este transpusa matricei A.

(5p) c) Calculaţi $\det(A-{}^TA)$.

2. Se consideră polinomul $f\in C[X]$, $f=x^4-x^3+x^2-x+1$ cu rădăcinile x_k, $k=\overline{1;4}$.

(5p) a) Arătaţi că (x+1)f(x)= x^5+1.

(5p) b) Calculaţi $\sum_{k=1}^{4}x_k^5$.

(5p) c) Demonstraţi că polinomul f nu are nicio rădăcină reală.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to R$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$.

(5p) a) Calculaţi asimptotele la graficul funcţiei f.

(5p) b) Stabiliţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

(5p) c) Arătaţi că şirul $a_n=\ln(n+2)-\sum_{k=1}^{n}f(k)$ este convergent.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

2. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\dfrac{1}{\cos x+2}$.

(5p) a) Calculaţi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx$.

(5p) b) Arătaţi că funcţia f admite primitive care sunt strict crescătoare pe R.

(5p) c) Calculaţi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Varianta 38

Prof. Isofache Cătălina Anca

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi $(1+i)^3+(1-i)^3$.

(5p) 2. Determinaţi minimul funcţiei $f:R\to R$, $f(x)=3x^2+x+5$.

(5p) 3. Rezolvaţi în R ecuaţia: $\sin^2 x=\cos x-1$.

(5p) 4. Calculaţi probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr natural format din trei cifre,acesta să fie divizibil cu 6.

(5p) 5. Calculaţi valorile reale ale parametrului m,dacă mediana din vârful C al triunghiului ABC cu A(m+1;2);B(2;4) şi C(m-1;2) are lungimea $\sqrt{2}$.

(5p) 6. Determinaţi valorile reale ale lui a, ştiind că vectorii $\vec{u}=\vec{i}+(a-3)\vec{j}$ şi $\vec{v}=(a+1)\vec{i}+5\vec{j}$ sunt coliniari.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră punctele A(m+1;2);B(m;m), C(2m+1;5) şi matricea $M=\begin{pmatrix} m+1 & 2 & 1\\ m & m & 1\\ 2m+1 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $m\in R$.

(5p) a) Calculaţi rangul matricei M.

(5p) b) Demonstraţi că există triunghiul ABC, pentru orice $m\in R$.

(5p) c) Calculaţi valoarea minimă a ariei triunghiului ABC.

2. Se consideră legea de compoziţie $x\circ y=\sqrt{x^2+y^2+x^2y^2}$, $\forall x,y\in G; G=[0;\infty)$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) a) Arătaţi că legea de compoziţie este asociativă.
(5p) b) Calculaţi elementele simetrizabile ale mulţimii G, în raport cu legea de compoziţie.
(5p) c) Rezolvaţi în mulţimea G ecuaţia $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{2014 ori} = x$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţiile $f; g: R \to R$, $f(x) = x^3 + x^2 + x + 3$ şi $g(x) = e^x$.

(5p) a) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - 42}{x - 3}$.

(5p) b) Demonstraţi că $g(x) \geq x + 1$,oricare ar fi $x \in R$.

(5p) c) Arătaţi că $g(x^3) + g(x^2) + g(x) \geq f(x), \forall x \in R$.

2. Se consideră funcţiile $f: (2;\infty) \to R$, $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$; $g: (2;\infty) \to R$

$g(x) = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x+1}$; A,B,C$\in R$ şi $F: [e; e^2] \to R$, $F(x) = \int\limits_x^{x+1} f(t)dt + \ln \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 2}$.

(5p) a) Calculaţi A,B şi C , ştiind că f(x)=g(x) , $\forall x \in (2;\infty)$
(5p) b) Determinaţi aria cuprinsă între graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=3 şi x=4.
(5p) c) Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei F în jurul axei Ox.

Varianta 39

Prof. Lămătic Lidia Carmen

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătaţi că numărul $n = \left|2\sqrt{2} - 2\right| + \left(\sqrt{2} + 1\right)^2$ este natural.

(5p) 2. Determinaţi numărul real x pentru care numerele $\sqrt[3]{8}, 2x + 1, 8$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2 + 3\right) = \log_2\left(3x + 1\right)$.

(5p) 4. Determinaţi câte numere naturale pare $\overline{abc}$, se pot forma ştiind că $a, b, c \in \{0, 1, 4, 5\}$.

(5p) 5. Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\vec{v} = -4\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ sunt perpendiculari.

(5p) 6. Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului dreptunghic isoscel ABC, ştiind că $m(A) = 90^\circ$ şi $AB = \sqrt{2}$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

(5p) a) Să se calculeze $f(A)=A^3-2A^2+A+I_3$.

(5p) b) Să se arate că $A^n=\begin{pmatrix}1 & n & na+C_n^2\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, pentru orice n număr natural, $n\geq 2$.

(5p) c) Arătaţi că A este inversabilă pentru orice $a\in\mathbb{R}$ şi calculaţi A^{-1}.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+4X^3+aX^2-6X+b\in\mathbb{C}[X]$.

(5p) a) Să se determine $a,b\in\mathbb{C}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $X-1$ şi cu $X+2$.

(5p) b) Pentru $a=1,b=0$ descompuneţi polinomul în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$.

(5p) c) Determinaţi o relaţie între a şi b ştiind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2x_3x_4=6$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1;+\infty)\to\mathbb{R},f(x)=\ln\frac{x^2}{x^2-1}$.

(5p) a) Calculaţi $f'(x)$.

(5p) b) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei.

(5p) c) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_o=2$, situat pe graficul funcţiei.

2. Se consideră funcţiile $f:(3;+\infty)\to\mathbb{R},f(x)=3x^2+3+\frac{1}{x-3}$ şi $F:(3;+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^3+3x+\ln(x-3)$.

(5p) a) Arătaţi că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $(3;+\infty)$.

(5p) b) Verificaţi dacă F este o primitivă a funcţiei f.

(5p) c) Calculaţi $\int_4^5 f'(x)dx$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 40

Prof. Lămătic Lidia Carmen

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinaţi produsul elementelor mulţimii $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,|x+2|\le 10\right\}$.

(5p) 2. Determinaţi $m\in\mathbb{R}-\{1\}$ astfel încât vârfurile parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m-1)x^2-2mx+m+1$ să fie situate sub axa Ox.

(5p) 3. Rezolvaţi, în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $5^x+5^{x+2}=\frac{26}{5}$.

(5p) 4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de două cifre, acesta să fie cub perfect.

(5p) 5. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin $A(1,-2)$ şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie $4x+2y-11=0$.

(5p) 6. Calculaţi cosinusul unghiului B al triunghiului ABC dacă $AB=3, AC=5$ şi $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră mulţimile $P=\left\{A\in M_3(\mathbb{R})\,|\,A^2=I_3\right\}$ şi $Q=\left\{A\in M_3(\mathbb{R})\,|\,A^2=A\right\}$.

(5p) a) Dacă $A\in P$ atunci $B=\frac{1}{2}(A+I_3)\in Q$.

(5p) b) Dacă $A\in Q$ atunci $C=2A-I_3\in P$.

(5p) c) Demonstraţi că $A(a,b)=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$ este inversabilă pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$ şi calculaţi $A^{-1}(a,b)$.

2. Fie $(I,+,\cdot)$ un inel necomutativ. Pe mulţimea I se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy+yx$.

(5p) a) Studiaţi comutativitatea şi asociativitatea legii de compoziţie "$*$".

(5p) b) Demonstraţi că operaţia "$*$" este distributivă faţă de adunare.

(5p) c) Să se arate că $x^2*(y*x)=(x^2*y)*x, \forall x,y\in I$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{e^x}$.

(5p) a) Precizaţi asimptotele funcţiei.
(5p) b) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
(5p) c) Aflaţi punctele de inflexiune ale funcţiei.

2. Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1+x+x^2$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

(5p) a) Studiaţi monotonia funcţiei F.
(5p) b) Arătaţi că F este inversabilă.
(5p) c) Calculaţi $\int_0^{\frac{11}{6}} F^{-1}(x)dx$, unde F^{-1} este inversa lui F.

Varianta 41

Prof. Lămătic Lidia Carmen

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi raţia progresiei geometrice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termeni pozitivi, dacă $a_2+a_3=4$ şi $a_4+a_5=36$.

(5p) 2. Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^{3-x}-4$ cu axele de coordonate.

(5p) 3. Rezolvaţi, în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $\sqrt[3]{x^2-1}=x-1$.

(5p) 4. Calculaţi probabilitatea ca, alegînd la întâmplare un număr natural de trei cifre distincte, suma cifrelor acestuia să fie egală cu 5

(5p) 5. Se consideră vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}$. Să se arate că unghiul format de cei doi vectori este ascuţit dacă şi numai dacă $a>3$.

(5p) 6. Arătaţi că $\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}\right)=1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

1. Fie sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} mx+y+z=3 \\ x+my+z=5 \\ x+y+mz=7 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil determinat.

(5p) b) Rezolvaţi sistemul pentru $m\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

(5p) c) Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât soluţia (x_0,y_0,z_0) este progresie aritmetică cu raţia 2.

2. Fie $a\in\mathbb{R}_+^*$ şi $I_a=(a,\infty)$. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-2x-2y+6$.

(5p) a) Să se determine $a\in\mathbb{R}_+^*$ pentru care I_a este parte stabilă pentru această lege de compoziţie.

(5p) b) Ştiind că $(I_2,\circ)$ este grup abelian, să se calculeze inversul elementului 2014.

(5p) c) Să se arate că $f:(\mathbb{R}_+^*,\cdot)\to(I_2,\circ)$, $f(x)=x+2$ este izomorfism de grupuri.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(-a,a)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{a+x}{a-x}$, $a\in\mathbb{R}_+^*$.

(5p) a) Cercetaţi dacă funcţia admite asimptote.

(5p) b) Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are soluţie unică.

(5p) c) Determinaţi intervalele de convexitate ale funcţiei.

2. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{2x}$.

(5p) a) Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(5p) b) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

(5p) c) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f^2(x)-e^{4x}+x-2$ în jurul axei Ox.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 42

Prof. Marcu Ştefan Florin

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Într-o progresie geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali , se ştie că $b_1=2$ şi $b_4=54$. Calculaţi suma primilor şase termeni ai progresiei .

(5p) 2. Aflaţi coordonatele punctelor de intersecţie dintre graficul funcţiei $f:R\to R, f(x)=x^2+x+2$ şi dreapta de ecuaţie $y=2x+8$.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale, ecuaţia : $2^{x-4}=4^{x-2}$.

(5p) 4. Aflaţi câte numere naturale de patru cifre distincte, se pot scrie cu cifrele impare.

(5p) 5. Calculaţi perimetrul unui triunghi ABC, ştiind că : $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+\vec{j}$ şi $\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{j}$.

(5p) 6. Calculaţi cosinusul unghiului A al triunghiului ABC, ştiind că : AB=4, AC=5 şi BC=6 .

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x, se consideră matricea : $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & x & 2 \\ 1 & -2 & x \end{pmatrix}$

(5p) a) Calculaţi $\det(A(x)+A(-x))$.

(5p) b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $\det(A(x))=0$.

(5p) c) Arătaţi că suma elementelor de pe diagonala principală a matricei $A(x)\cdot A(-x)$ este strict negativă .

2. Pe mulţimea numerelor reale, se defineşte legea de compoziţie asociativă : $x\circ y=x\cdot y+5x+5y+20$

(5p) a) Verificaţi că : $x\circ y=(x+5)(y+5)-5$, $(\forall)x,y\in R$

(5p) b) Aflaţi elementul neutru al legii de compoziţie .

(5p) c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale, ecuaţia : $\underbrace{x\circ x\circ ...\circ x}_{2014-ori}=x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R\to R, f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

(5p) a) Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}, (\forall)x\in R$.

(5p) b) Aflaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f .

(5p) c) Arătaţi că f este strict crescătoare pe R .

2. Se consideră şirul : $I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^x dx, n \in N$.

(5p) a) Calculaţi I_1.

(5p) b) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n \in N}$ este strict descrescător .

(5p) c) Demonstraţi că : $I_n + n \cdot I_{n-1} = e, (\forall) n \in N^*$.

Varianta 43

Prof. Marcu Ştefan Florin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi modulul numărului complex : $z = \frac{(1+i)^{2014}}{(1-i)^{2013}}$.

(5p) 2. Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei : $f : R \to R, f(x) = x^2 + x + 1$.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale, ecuaţia : $\log_2(x^2+1) = 1 + \log_2 x$.

(5p) 4. Calculaţi probabilitatea ca un număr natural de două cifre să fie divizibil cu 5 .

(5p) 5. În reperul cartezian XOY se consideră punctele A,B,C de coordonate : A(1,1) , B(-1,-1) şi C(2,-2) . Calculaţi lungimea medianei duse din vârful C în triunghiul ABC .

(5p) 6. Într-un triunghi ABC avem $A = \frac{\pi}{4}, B = \frac{\pi}{3}$. Calculaţi $\sin C$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

(5p) a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale, ecuaţia : $\det(I_2 + x \cdot A) = 1$

(5p) b) Verificaţi că : $A^2 + 5 \cdot A = O_2$.

(5p) c) Calculaţi suma : $A + A^2 + ... + A^{2014}$.

2. Se consideră polinomul $f \in R[X], f = X^3 + aX^2 + bX + c$ cu $a, b, c \in R$.

(5p) a) Să se determine $a, b, c \in R$, ştiind că $f(0) = 1, f(1) = 4, f(-1) = 0$

(5p) b) Pentru $a = b = c = 1$, aflaţi rădăcinile polinomului f .

(5p) c) Arătaţi că, dacă $a^2 - 2b < 0$, atunci f nu are toate rădăcinile reale .

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R\to R, f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

(5p) a) Aflaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f .

(5p) b) Calculaţi $f'(x)$.

(5p) c) Arătaţi că f este strict crescătoare pe $(-1,1)$.

2. Se consideră şirul : $I_n=\int_0^1 \dfrac{x^n+nx+1}{x+1}dx, n\in N$

(5p) a) Calculaţi I_2 .

(5p) b) Arătaţi că : $0<I_n<(n+2)\cdot\ln 2$.

(5p) c) Calculaţi : $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot(I_n+I_{n+1})$.

Varianta 44

Prof. Marcu Ştefan Florin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi suma : $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}-....+\dfrac{1}{3^6}$.

(5p) 2. Se consideră funcţiile $f,g:R\to R, f(x)=2x+1, g(x)=x+3$. Calculaţi $f(g(0))-g(f(0))$.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale, ecuaţia : $\sqrt{x^2+1}=x-3$.

(5p) 4. Aflaţi câte numere naturale de trei cifre distincte, se pot scrie cu cifrele pare nenule .

(5p) 5. Fie vectorii : $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}, \vec{v}=\vec{i}-\vec{j}, \vec{a}=5\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine numerele reale x, y astfel încât $\vec{a}=x\cdot\vec{u}+y\cdot\vec{v}$.

(5p) 6. Fie $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ cu $\sin x=\dfrac{1}{3}$. Calculaţi $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În reperul cartezian XOY se consideră punctele $A_n(2n-1,2n+1)$ cu $n\in N$.

(5p) a) Calculaţi aria triunghiului $OA_{2013}A_{2014}$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) b) Arătaţi că, punctele A_m, A_n, A_p sunt coliniare, oricare ar fi $m, n, p \in N$.

(5p) c) Aflaţi câte drepte distincte, determină punctele $O, A_0, A_1, ..., A_{2014}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale, se defineşte legea de compoziţie :
$x \circ y = x \cdot y - ax - ay + 2$.

(5p) a) Să se afle $a \in R$ ştiind că $x \circ y = (x-1)(y-1)+1,\ (\forall) x, y \in R$.

(5p) b) Pentru a=1, verificaţi dacă numărul $\frac{2014}{2013}$ este simetricul numărului 2014, în raport cu legea "$\circ$" .

(5p) c) Aflaţi valorile reale ale lui a, pentru care : $x \circ x > 0, (\forall) x \in R$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : R^* \to R, f(x) = \frac{e^x}{x}$.

(5p) a) Aflaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f .

(5p) b) Calculaţi $f'(x)$.

(5p) c) Demonstraţi că : $\frac{2014}{\ln 2014} > \frac{2013}{\ln 2013}$.

2. . Se consideră şirul : $I_n = \int_0^1 x \cdot (1-x)^n dx, n \in N$.

(5p) a) Calculaţi I_1 .

(5p) b) Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n \in N}$ este convergent .

(5p) c) Arătaţi că : $I_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, (\forall) n \in N$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Prof. Nicolaescu Nicolae

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinați modulul numărului complex $(1+i)(2-3i)$.

(5p) 2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x+1}-2^{x+2}+1=0$.

(5p) 3. Determinați valoarea minimă a funcției $f:R\to R, f(x)=x^2-7x+6$.

(5p) 4. Calculați probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr de două cifre, acesta să fie divizibil cu 7.

(5p) 5. Se consideră punctele A și B astfel încât $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+3\vec{j}$ și $\overrightarrow{OB}=-\vec{i}+5\vec{j}$ .Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$.

(5p) 6. Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC dacă $AB=2, AC=3, m(A)=\frac{5\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix} 2^x & 0 & 1 \\ x & 2^x & -2 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}, x\in R..$

(5p) a) Arătați că D(x) este pătrat perfect, $\forall x\in N$.

(5p) b) Calculați D(0).

(5p) c) Rezolvați în R ecuația $D(x)=2^{2x}$.

2. Pe mulțimea $G=(\sqrt{3},\infty)$ se consideră legea de compoziție $x*y=\sqrt{x^2y^2-3x^2-3y^2+12}$

(5p) a) Să se arate că legea este asociativă.

(5p) b) Să se determine elementul neutru al legii.

(5p) c) Să se rezolve în G ecuația $x*1=1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:D\to R, f(x)=\ln\left(1+\frac{2014}{x}\right)$, unde D reprezintă domeniul maxim de definiție al funcției.

(5p) a) Determinați domeniul maxim de definiție D.

(5p) b) Calculați $f'(x)$.

(5p) c) Determinați asimptota la graficul funcției către $+\infty$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

2. Fie $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases} xe^x, x\le 0 \\ \sin^3 x, x>0 \end{cases}$.

(5p) a) Să se arate că f admite primitive pe R.

(5p) b) Să se calculeze $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)}{x^2}$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 46

Prof. Nicolaescu Nicolae

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculați $\left[\sqrt{2014}\right]+\sqrt{\left[\frac{2014}{2013}\right]}$.

(5p) 2. Se consideră șirul $(a_n)_{n\ge 1}$ definit prin $a_n=5n-3$. Arătați că șirul este o progresie aritmetică.

(5p) 3. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2+3x+3=0$. Calculați $\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}$.

(5p) 4. Se consideră funcția $f:R\to R,\ f(x)=1+3x$. Rezolvați în R ecuația $f\circ f=f$.

(5p) 5. Fie $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Calculați tgx.

(5p) 6. Fie paralelogramul ABCD cu AB=6, BC=8, $m(B)=\frac{\pi}{6}$. Calculați aria triunghiului ABO, unde O este punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ mx-y+z=-1 \\ x-my-z=2 \end{cases}, m\in R$

(5p) a) Calculați determinantul matricei A, unde A reprezintă matricea asociată sistemului.

(5p) b) Determinați valorile reale ale lui *m* astfel încât matricea A să fie inversabilă.
(5p) c) Arătați că sistemul este incompatibil pentru m= -1.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-\left(m^2+n^2\right)X^2+\left(m+n\right)X+1, m,n\in R.$

(5p) a) Calculați f(0).
(5p) b) Determinați m,n∈R, astfel incât între rădăcinile polinomului x_1, x_2, x_3 să existe relația

$$x_1+x_2+x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-\frac{1}{2}$$

(5p) c) Pentru m=1 și n=0 calculați f(1)+f(2)+…+f(100).

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:R-\{2\}\to R,\ f(x)=\frac{2014x}{x-2}$.

(5p) a) Calculați $f'(x)$.

(5p) b) Arătați că $f(x)<2014, \forall x\in\left(-\infty,2\right)$.

(5p) c) Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} arctg\frac{2}{\sqrt{x-2}}\cdot f(x)$

2. Se consideră funcțiile $f,g:\left(0,\infty\right)\to R, f(x)=x^3\left(\ln x-1\right), g(x)=x^2\left(3\ln x-2\right)$.

(5p) a) Arătați că f este o primitivă a lui g.

(5p) b) Calculați $\int_1^e g(x)dx$.

(5p) c) Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Prof. Nicolaescu Nicolae

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+2)+\log_2 x=3$.

(5p) 2. Într-o progresie geometrică al cincilea termen este egal cu 48, iar al treilea termen este egal cu 12.Calculați al nouălea termen al progresiei geometrice.

(5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{2-x}=x$.

(5p) 4. Determinați partea imaginară a numărului $\frac{i^{2014}}{i+1}$.

(5p) 5. Calculați $tg\frac{11\pi}{4}$.

(5p) 6. Fie dreptunghiul ABCD cu AB=8, BC=6, iar O este punctul de intersecție al diagonalelor. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{DC}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ în $M_2(R)$.

(5p) a) Rezolvați ecuația $\det(A+xI_2)=-3$.

(5p) b) Rezolvați în $M_{2,1}(R)$ ecuația $A\cdot X=C$.

(5p) c) Arătați că matricea A-xB este inversabilă pentru orice x număr natural par.

2. Se consideră polinomul $f=mX^3+2X^2+3X+\hat{1}\in Z_7[X]$.

(5p) a) Determinați $m\in Z_7$ astfel încât produsul rădăcinilor polinomului f să fie egal cu $\hat{3}$.

(5p) b) Pentru $m=\hat{1}$ calculați $f(\hat{1})$.

(5p) c) Pentru $m=\hat{1}$ determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X+6$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:R\to R, f(x)=e^x+2014x.$

(5p) a) Arătați că f este convexă pe R.

(5p) b) Determinați asimptota la graficul funcției către $-\infty$.

(5p) c) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției în punctul A(0,1).

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

2. Se consideră integralele $I_n=\int_0^1 (x+1)^n arctgx dx, n\in N.$

(5p) a) Calculați I_1.

(5p) b) Arătați că $\frac{\pi}{4}-\ln 2\le I_n\le 2^n\frac{\pi}{4}, n\in N$.

(5p) c) Calculați aria suprafeței plane mărginite de graficul $g:[0,\frac{1}{2}]\to R, g(x)=arctg2x$,axa Ox și dreptele de ecuație x=0 și $x=\frac{1}{2}$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 49

Prof: Nicolaescu Nicolae.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Se consideră funcţia $f:R\to R$, f(x)=2-3x.Arătaţi că fof este crescătoare.

(5p) 2. Să se rezolve în R ecuaţia $2^x+2^{1-x}=3$.

(5p) 3. Care este probabilitatea ca alegând un element $k\in\{1,2,3,4,5\}$, numărul C_6^k să fie par?

(5p) 4. Determinaţi $z\in C, z=a+bi,\ a,b\in Z$ astfel încât $|z|=2$.

(5p) 5. Să se determine ecuaţia înălţimii AM a ΔABC, unde A(-1,3),B(0,6),C(5,-2).

(5p) 6. Să se calculeze sin2x, dacă $\cos x=\frac{3}{7}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} a^2x+by+cz=-1\\ ax+b^2y+cz=-1\\ ax+by+c^2z=-1\end{cases}$ şi fie $A=\begin{pmatrix} a^2 & b & c\\ a & b^2 & c\\ a & b & c^2\end{pmatrix}$ matricea sistemului.

(5p) a) Să se arate că există a,b,c nenule astfel încât detA=0.

(5p) b) Rezolvaţi sistemul pentru a=2, b=1, c=1.

(5p) c) Determinaţi $a,b,c\in R$ astfel încât sistemul să admită soluţia $x=y=z=1$.

2. Pe $(-\infty,1)$ definim legea $x*y=1-(1-x)^{\log_2(1-y)}$.

(5p) a) Arătaţi că legea este asociativă.

(5p) b) Să se determine elementul neutru al legii.

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia $x*x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=x^4-4x+3$.

(5p) a) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)}{(x-1)^3}$.

(5p) b) Arătaţi că f este descrescătoare pe $(-\infty,1)$.

(5p) c) Determinaţi $m,n\in R$, astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{f(x)}-(mx^2+n)=5$.

2. Fie funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\ln(1+e^x)$.

(5p) a) Să se arate că orice primitivă a lui f este crescătoare pe R.

(5p) b) Să se calculeze $\int_0^1 \ln(1+e^x)e^x dx$.

(5p) c) Calculaţi derivata funcţiei $g:(0,\infty)\to R, g(x)=\int_0^{\ln x} f(t)dt$.

Varianta 50

Prof: Nicolaescu Nicolae.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinaţi $x,y\in R$ astfel încât $(2x+3yi)-(y-xi)=2+i$.

(5p) 2. Să se rezolve în $(0,\infty)$ ecuaţia $\log_3^2 x+\log_3 9x-4=0$.

(5p) 3. Se consideră funcţia $f:R\to R, f(x)=mx^2-2mx+3$.Să se determine $m\in R$ astfel încât graficul funcţiei f să nu intersecteze axa Ox.

(5p) 4. Să se calculeze $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{3^8}$.

(5p) 5. Se consideră punctele A(3,a),B(-1,2),C(2,a),D(4,0).Să se determine $a\in R$ astfel încât $AB\perp CD$.

(5p) 6. Să se arate că $\dfrac{\sqrt{6}\sin 135^o}{\cos 150^o}\in Z$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră mulţimea $G=\left\{M(x)\in M_3(R)/M(x)=\begin{pmatrix}2^x & 0 & 0\\ 0 & 3^x & 0\\ 0 & 0 & 5^x\end{pmatrix}\right\}$.

(5p) a) Să se arate că $(G,\cdot)$ grup abelian.

(5p) b) Să se arate că $(R,+)\simeq(G,\cdot)$.

(5p) c) Rezolvaţi ecuaţia $\det\left(M(x)\cdot M(2x)\cdot\ldots\cdot M(2012x)\right)=30^{2012}$.

2. În $Z_5[X]$ se consideră polinoamele $f=X^3+2X^2+4,\ g=X+\hat{3}$.

(5p) a) Să se arate că g/f.

(5p) b) Descompuneţi polinomul f în $Z_5[X]$.

(5p) c) Câte perechi $(a,b)\in Z_5\times Z_5$ verifică relaţia $(ax+\hat{b})^2=4x^2+x+\hat{1},(\forall)x\in Z_5$?

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=e^x\left(ax^2+bx+c\right)$.

(5p) a) Să se determine $a,b,c\in R$ astfel încât $f'(x)=e^x\left(3x^2+7x+3\right)$.

(5p) b) Pentru a=3,b=1, c=2 să se calculeze asimptota la graficul funcţiei f către $-\infty$.

(5p) c) Pentru $a=3,b=1,c=2$ să se rezolve ecuaţia $f(\ln x)=6x$.

2. Fie funcţia $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases}x^2\sin x, x\le 0\\ \ln(x+1), x>0\end{cases}$.

(5p) a) Să se arate că f admite primitive pe R.

(5p) b) Să se determine primitiva funcţiei f care îndeplineşte condiţia $F(0)=1$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

100 variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Prof: Nicolaescu Nicolae.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine $x \in R$ astfel încât $x, x^3, 5x+4$ să fie în progresie aritmetică.

(5p) 2. Să se rezolve ecuaţia $A_n^3 = n, n \in N, n \geq 3$.

(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{3-x}+\sqrt{5x+9}=4$.

(5p) 4. Aflaţi $x \in [0, 2\pi)$ din ecuaţia $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(5p) 5. În paralelogramul ABCD, AB=6cm, AD=4cm, $m(\measuredangle BAD)=75^o$ .Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

(5p) 6. Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care expresia $\arcsin(x^2+x+1)$ are sens.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră mulţimea $M=\left\{X \in M_2(R) / X^2=-3X\right\}$.

(5p) a) Să se arate că $A=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ -4 & 1\end{pmatrix} \in M$.

(5p) b) Să se arate că dacă $A \in M$,atunci $\det A=0$ sau $\det A=9$.

(5p) c) Dacă $A \in M$, $\det A=0$ şi $A \neq O_2$, atunci $trA=-3$.

2. Se consideră punctele A(-1,1),B(2,3),C(1,0),D(-2,-2).

(5p) a) Arătaţi că ABCD paralelogram.

(5p) b) Să se calculeze A_{ABCD}.

(5p) c) Să se determine $M \in BC, M \neq C$ astfel încât lungimea segmentului AM să fie egală cu $\sqrt{5}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(-\infty,-2012)\cup(0,+\infty)\to R$, $f(x)=\ln(1+\frac{2012}{x})$

(5p) a) Să se arate că f' crescătoare pe domeniul maxim de definiţie.

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f(n)\right]^n$.

(5p) c) Să se arate că $\exists c \in (1,2)$ astfel încât $\frac{2012}{c(c+2012)}=-\ln\frac{1007}{2013}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(1-3x^2\right)^n dx$.

(5p) a) Calculaţi I_1.

(5p) b) Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

(5p) c) Demonstraţi că $I_n = \frac{4n^2-4n}{4n^2-1} I_{n-2}$, $\forall n \geq 3$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 52

Prof. Oancea Cristina

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Se considera functia $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, $f(x)=mx^2-mx+1, m\in R^*$.Sa se determine numarul real m stiind ca valoarea minima a functiei este egala cu4.

(5p) 2. Sa se determine solutiile reale ale ecuatiei $2\cdot 9^x-3\cdot 3^x+1=0$

(5p) 3.. In reperul cartezian xOy se considera punctele A(2;3),B(10;17).Determinati coordonatele punctului M, stiind ca $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

(5p) 4. Sa se determine numarul real a daca dreptele 3x+2y-5=0 si ax+6y+1=0 sunt paralele.

(5p) 5. Sa se calculeze $\sin^2 135^\circ+\cos^2 45^\circ$

(5p) 6. Determinati $x\in(0;\frac{\pi}{2})$,stiind ca

$$\frac{tgx+2ctgx}{ctgx}=3$$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se considera sistemul $\begin{cases} mx-y+4z=4 \\ x-2y+2z=-1 \\ 3x-y+z=2 \end{cases}$, unde m este un parametru real.

(5p) a) Sa se afle valorile reale ale lui m , pentru care tripletul (1,2,1) este solutie a sistemului de ecuatii.

(5p) b) Sa se arate ca $\forall m\in Q$, sistemul este compatibil determinat.

(5p) c) Sa se arate ca determinantul matricei asociate sistemului <16 , $\forall m\in N$

2. Se considera polinoamele cu coeficiente rationali $f(x)=6x^4+ax^3+bx^2+14x+4$ si $g(x)=3x^3+x^2+3x+1$

(5p) a) Pentru a =12 si b=6 , sa se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$

(5p) b) Sa se determine a, b $\in$ R astfel incat polinomul f(x) sa fie divizibil cu polinomul g(x).
(5p) c) Pentru a =14 si b=10 sa se descompuna polinomul f(x) in produs de factori ireductibili in Q[x].

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se considera functia $f:R/\{5\}\to R, f(x)=\dfrac{x^2+6x+9}{x+5}$
(5p) a) Sa se scrie ecuatia asimptotei oblice spre $+\infty$ a graficului functiei f.
(5p) b) Sa se determine punctele de extrem pentru functia f.

(5p) c) Scrieti ecuatia tangentei la graficul functiei in punctul de abscisa 0.

2. Se considera functia $f:R\to R, f(x)=\begin{cases}e^x+1, x\in(-\infty;0)\\ 2-x, x\in[0;\infty)\end{cases}$

(5p) a) Sa se arate ca functia f admite primitive pe R.
(5p) b) Sa se determine volumul corpului obtinut prin rotatia in jurul axei Ox a graficului functiei f(x).
(5p) c) Sa se calculeze $\int_0^1 x\cdot f(x)\,dx$

Varianta 53

Prof. Oancea Cristina

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculati $(3^0+3^1+.....3^{2014})\cdot\dfrac{2}{3^{2015}-1}$
(5p) 2. Cate numere de 3 cifre se pot forma cu elementele multimii {0,1,2,3,4,5}?
(5p) 3. Calculati $(1\text{-}i)^{2014}\text{-}(1+i)^{2014}$
(5p) 4. Sa se determine coordonatele varfului parabolei asociate functiei
$f:R\to R, f(x)=x^2-5x+6$
(5p) 5. Fie vectorii $\vec{a},\vec{b}$ care verifica relatiile $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=3$ si $m(\sphericalangle\alpha)=30^0$ .Calculati $\vec{a}\cdot\vec{b}$
(5p) 6. Calculati $\sin 35^\circ+\cos 35^\circ+\cos 145^\circ-\sin 145^\circ$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie matrices $A=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$ si $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,$O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

100 Variante BAC 2014 www.mateinfo.ro

(5p) a) Stiind ca $A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$ sa se calculeze

$A^1 + A^2 + A^3 + ... + A^{2014}$

(5p) b) Sa se calculeze A^{-1}

(5p) c) Sa se rezolve ecuatia $\det(A^n) = 3 \cdot 5^{2n} - 1250$

2. Fie polinoamele $f(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 44x - 32$ si $g(x) = x - 8$

(5p) a) Sa se determine catul si restul impartirii polinomului f(x) la g(x)

(5p) b) Sa se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

(5p) c) Sa se descompuna polinomul f(x) in produs de factori ireductibili.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se considera functia $f(x): R \to R, f(x) = (x^2 - 1) \cdot \ln x$

(5p) a) Rezolvati ecuatia $f(x) + f'(x) = 0$

(5p) b) Precizati intervalele de monotonie ale functiei.

(5p) c) Scrieti ecuatia tangentei la graficul functiei in punctul de abscisa 1.

2. Pentru $\forall n \in N$ se considera functiile $f_n : [-2;2] \to R, f_n(x) = \dfrac{(x-2)^n}{x+3}$ si integralele $I_n = \int_{-2}^{2} f_n(x)dx$

(5p) a) Sa se calculeze I_1 .

(5p) b) Sa se calculeze $\int_{-2}^{2} (x+3) f_1(x)dx$

(5p) c) Calculati volumul corpului obtinut prin rotatia , in jurul axei Ox a graficului $g(x) = (x+3) \cdot f_2(x)$ pentru $x \in [0,2]$

Varianta 54

Prof. Oancea Cristina

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinati $n \in N, n \geq 1$ pentru care $A_n^1 + C_n^1 = 36$

(5p) 2. Pretul unui produs este de 215 lei,el se scumpeste cu 10%.Calculati pretul produsului dupa scumpire.

(5p) 3. Aratati ca $\left(\sqrt{6};\sqrt{12}\right) \cap Z = \{3\}$

(5p) 4. Aflati cardinalul multimii $A = \{x \in Z / |3x+2| \leq 11\}$

(5p) 5. Determinati numarul real m pentru care ecuatia x^2 -(m-2)x+2m=0

(5p) 6. Calculati

$\cos 60^\circ + \cos 70^\circ + \cos 80^\circ + \cos 100^\circ + \cos 110^\circ + \cos 120^\circ$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se considera matricele A=$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5p) a) Sa se calculeze $A^2 + B^2$

(5p) b) Verificati daca det(A+B)=det(A)+det(B)

(5p) c) Stiind ca C=A+B sa se calculeze $C^1 + C^2 + C^3 + ...C^{2014}$

2. Fie polinomul $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ si $g(x) = x - 4$

(5p) a) Sa se determine catul si restul impartirii polinomului f(x) la g(x)

(5p) b) Sa se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

(5p) c) Sa se descompuna polinomul f(x) in produs de factori ireductibili.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.Se considera functia $f : (0;\infty) \to R$ definita prin $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x+2)^3}$

(5p) a) Calculati $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

(5p) b) Aflati asimptotele graficului functiei f(x).

(5p) c) Sa se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} x^4 \cdot f'(x)$

2. Pentru $\forall n \in N$ se considera functiile $f_n(x) : R \to R, f_n(x) = (x-3)^n si$ integralele

$I_n = \int_0^3 f_n(x)dx$

(5p) a) Sa se calculeze I_2

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) b) Sa se calculeze aria suprafetei cuprinse intre graficul functiei $f_{2014}(x)$ si dreptele x=0 si x=3

(5p) c) Sa se calculeze $\int_0^3 x \cdot f_n(x)dx$

Varianta 55

Prof. Oláh Csaba

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine numărul natural x din egalitatea: $1+4+7+...+x=145$.

(5p) 2. Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-(m+1)x+m=0, m\in R$. Să se demonstreze că expresia $m\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-1\right)$ nu depinde de m.

(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$, $x\in[0,2\pi]$.

(5p) 4. Să se afle termenul dezvoltării binomului $\left(\sqrt{a}+\frac{4}{\sqrt[3]{a}}\right)^{150}$, $a>0$ care nu conţine pe a.

(5p) 5. Să se determine numărul real m astfel încât punctele $A(1,2m+1)$, $B(2,9)$ şi $C(4,4m+1)$ să fie coliniare.

(5p) 6. Dacă $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $tg^2\alpha=8$, să se calculeze $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $V(a,b,c)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{pmatrix}\in M_3(R)$, şi x_1,x_2,x_3 rădăcinile ecuaţiei $x^3-3x+2=0$.

(5p) a) $\det(V(1,2,3))=?$;

(5p) b) Să se calculeze produsul $V(a,b,c)\cdot {}^tV(a,b,c)$;

(5p) c) Să se calculeze valoarea determinantului $\det(V(x_1,x_2,x_3))$.

2. Fie polinomul $f\in R[X]$, $f=X(X+1)(X+2)(X+3)$.

(5p) a) Să se demonstreze că $\nexists k\in Z^*$ astfel încât $f(k)=m^2, m\in Z$;

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) b) Să se afle k, dacă $f(k)=-1, k\in R$;

(5p) c) Să se calculeze suma $\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{(k+1)(k+2)}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:R\to R$, $f(x)=(x-5)(x-1)(x+3)(x+7)$.

(5p) a) Să se calculeze limita $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-5x+4}$;

(5p) b) Să se calculeze $\frac{f'(2)}{f(2)}$;

(5p) c) Să se arate că f' are trei rădăcini reale.

2. Fie funcţiile $f,g:R\to R, f(x)=\frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}$, $g(x)=\frac{x^2-x+1}{x^4+x^2+1}$.

(5p) a) Să se calculeze $\int f(x)dx$;

(5p) b) Dacă $H(x)$ este o primitivă a funcţiei $h:R\to R$, $h(x)=f(x)+g(x)$, să se arate că $H(x)$este o funcţie crescătoare;

(5p) c) Să se calculeze $\int_0^1[f(x)+g(x)]dx$.

100 variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 56

Prof. Oláh Csaba

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se demonstreze că $(1+i)^{100}+(1-i)^{100}\in Z$.

(5p) 2. Fie funcţiile $f,g:R\to R$, $f(x)=x^2-4x+5$, $g(x)=4x-7$. Să se afle coordonatele punctelor de întâlnire ale graficelor lui f şi g.

(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x+\left(3-2\sqrt{2}\right)^x=2$, $x\in R$.

(5p) 4. Care este probabilitatea ca alegând un număr de trei cifre, acesta sa fie format din cifre prime distincte.

(5p) 5. Fie vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+(m+2)\vec{j}$, $\vec{v}=(1-m)\vec{i}+(m-1)\vec{j}$, $m\in R$. Să se afle m, dacă $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{2}$.

(5p) 6. În triunghiul ABC se cunosc: $AB=12cm, BC=16cm$ şi $AC=20cm$. Să se afle lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 & 0 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in M_3(R)$.

(5p) a) Să se afle m, ştiind că $rangA(m)=3$;

(5p) b) Să se determine $A^{-1}(2)$;

(5p) c) c) Să se rezolve ecuaţia $\det\left(A(m)\cdot A(m-1)\right)=-1$, $m\in R$.

2. Fie polinomul $f\in R[X]$, $f=X^5-2X^4+6X^3-12X^2+5X-10$.

(5p) a) Să se demonstreze că f nu are toate rădăcinile reale;

(5p) b) Să se determine o rădăcină reală a lui f;

(5p) c) Să se demonstreze că f are patru rădăcini complexe diferite.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:R\setminus\{-4\}\to R$, $f(x)=\dfrac{2x^2+9x+1}{x+4}$.

(5p) a) Să se studieze monotonia funcţiei f pe domeniul maxim de definiţie;

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) b) Să se determine asimptotele lui f;

(5p) c) Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{2x}\right)^{2x+1}$.

2. Se consideră integrala $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$, $n\in N^*$.

(5p) a) Să se calculeze I_1;

(5p) b) Să se arate că $I_{n+1}=\frac{1}{n+1}-I_n$;

(5p) c) Să se calculeze I_6.

Varianta 57

Prof. Oláh Csaba

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Dacă $z\in C$, $z+\frac{1}{z}=i$, să se calculeze $z^4+\frac{1}{z^4}$.

(5p) 2. Fie $f,g:R\to R$, $f(x)=x^2-6x+8$ şi $g(x)=2x-6$. Să se rezolve ecuaţia $(f\circ g)(x)=0$.

(5p) 3. Să se afle valoare lui x din ecuaţia $\log_{x-1}(x+1)+\log_{x+1}(x-1)=2$.

(5p) 4. Să se determine $n\in N^*$ dacă $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2048$.

(5p) 5. Fie punctele $A(2,3), B(1,5)$ şi $C(2,7)$ în sistemul cartezian. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

(5p) 6. Să se demonstreze că $2(\sin a+\sin b)(\sin a-\sin b)=\cos 2b-\cos 2a$, $a,b\in R$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie determinantul $D=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3-2x+5=0$.

(5p) a) Să se calculeze determinantul D;

(5p) b) Să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3$;

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} x & 2-x & x-3 \\ x-3 & x & 2-x \\ 2-x & x-3 & x \end{vmatrix} = 0$.

2. Fie mulţimea $G=(4,\infty)$ şi operaţia algebrică "$*$", $x*y=xy-4x-4y+20$, $x,y\in G$.

(5p) a) Să se calculeze elementele simetrizabile din G, în raport cu "$*$";

(5p) b) Să se afle $b\in R$ pentru care $x*b=b*x=b$, $\forall x\in R$;

(5p) c) Să se rezove ecuaţia $x^4*4^4*4+4^x=5$, dacă se ştie ca legea de compoziţie "$*$" este asociativă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\dfrac{3n^2+3n+1}{\left[n(n+1)\right]^3}$.

(5p) a) Să se studieze monotonia şirului $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n=a_n+\dfrac{1}{(n+1)^3}$;

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot n^4$;

(5p) c) Să se calculeze limita $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

2. Fie funcţia $f_n:R\to R$, $f_n(x)=\dfrac{1+tg^2x}{1-tg^nx}$, $n\in N^*$ şi $I_n=\int f_n(x)dx$.

(5p) a) Să se calculeze I_1;

(5p) b) Să se calculeze I_2;

(5p) c) Să se calculeze integrala $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} f_4(x)\,dx$.

100 variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 58

Prof: Păcurar Cornel-Cosmin

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1.Determinați numărul elementelor mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,|2x-1|\le 9\right\}$.

(5p) 2.Determinați coordonatele punctelor de intersecție a dreptei $y=2x-1$ cu parabola $y=3x^2-3x+1$.

(5p) 3.Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{8-3x}=2-x$.

(5p) 4.Determinați numărul termenilor raționali ai dezvoltării $\left(2-\sqrt{3}\right)^{2012}$.

(5p) 5.Calculați distanța de la punctul $A(1,2)$ la dreapta determinată de punctele $B(2,0)$ și $C(0,2)$.

(5p) 6. Știind că $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ și $\cos 2x=\frac{1}{2}$, calculați $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x-my+m^2z=0 \\ -mx+m^2y+z=0 \\ m^2x+y-mz=0 \end{cases}$,unde $m\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Determinați valorile lui m pentru care determinantul matricei sistemului este nul.

(5p) b) Arătați că, pentru nicio valoare a lui m ,sistemul un are o soluție (x_0,y_0,z_0) cu x_0,y_0,z_0 numere reale strict pozitive.

(5p) c) Arătați că rangul matricei sistemului este diferit de 2,oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

2.Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{3}(2x+2y-xy+2)$.

(5p) a)Verificați dacă legea de compoziție „$*$" este asociativă.

(5p) b)Arătați că legea de compoziție „$*$" admite element neutru.

(5p) c)Rezolvați ecuația $x*x*x*x=-1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-3x+2012$.

(5p) a)Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f(-x)}$.

(5p) b)Demonstrați că funcția f este crescătoare pe intervalul $[1,+\infty)$.

(5p) c) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația $f(x) = m$ are trei soluții reale distincte.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}, I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+2012} dx$.

(5p) a) Calculați I_2.

(5p) b) Arătați că $I_{n+1} \leq I_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $I_{n+1} + 2012 I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

(5p) c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Varianta 59

Prof: Păcurar Cornel-Cosmin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze $(1-2i)(1+i)-3(3-2i)$.

(5p) 2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x^2-x+1} = x+2$.

(5p) 3.Rezolvați în $[0, 2\pi)$ ecuația $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

(5p) 4.Se consideră mulțimea $A = \{1,2,3,...,11\}$ .Determinați numărul de submulțimi cu 4 elemente ale mulțimii A,submulțimi care conțin exact 3 numere impare.

(5p) 5.Calculați lungimea medianei din A în $\triangle ABC$, unde $A(-1;3), B(1;5)$ și $C(3;-1)$.

(5p) 6.Fie x un număr real care verifică egalitatea $tgx + ctgx = 3$. Arătați că $\sin 2x = \frac{2}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

(5p) a)Arătați că $A(x)\cdot A(y) = A(x+y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

(5p) b)Arătați că $(A(x)-A(y))^{2012} = O_3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

(5p) c) Determinați inversa matricei $A(x)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

2.Se consideră polinomul $f = (x+2i)^{10} + (x-2i)^{10}$, având forma algebrică

$f = a_{10}X^{10} + a_9X^9 + ... + a_1X + a_0$, unde $a_0, a_1, ..., a_{10} \in \mathbb{C}$.

(5p) a)Determinațirestul împărțirii polinomului f la $X - 2i$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) b) Arătați că toți coeficienții polinomului f sunt numere reale.

(5p) c) Demonstrați că tóate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(2;+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(x+2)-\ln(x-2)$.

(5p) a) Arătați că funcția f este strict descrescătoare pe $(2;+\infty)$.

(5p) b) Determinați asimptotele graficului funcției f.

(5p) c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$.

2.Se consideră funcția $f:[1;3]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+3$.

(5p) a)Calculați $\int_1^9 f(\sqrt{x})dx$.

(5p) b)Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției $g:[1;3]\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ și axa Ox.

(5p) c)Arătați că $(2n+1)\int_1^3 f^n(x)dx+2n\int_1^3 f^{n-1}(x)dx=0$.

Varianta 60

Prof: Păcurar Cornel-Cosmin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1.Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, cu termeni pozitivi, dacă $b_1+b_3=5$ și $b_3+b_5=20$.

(5p) 2.Să se determine valorile lui $a\in\mathbb{R}^*$ pentru care ecuația $ax^2+(3a-2)x+2a-1=0$ are soluții reale.

(5p) 3.Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2\ln(2x-3)-\ln(x-1)=\ln(5-2x)$.

(5p) 4.Determinați $n\in\mathbb{N}, n\geq 2,$ pentru care $C_n^2+A_n^2=63$.

(5p) 5.Să se arate că vectorii $\vec{v_1}=2011\vec{i}+2012\vec{j}$ și $\vec{v_2}=2011\vec{i}-2012\vec{j}$ formează un unghi obtuz.

(5p) 6.Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC știind că $A=\dfrac{\pi}{4}, B=\dfrac{\pi}{6}$ și $AB=12$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ și sistemul $\begin{cases} ax+y+z=5 \\ 2x+3y+4z=9 \\ 4x-y-3z=b \end{cases}$.

(5p) a) Să se determine a,b pentru care sistemul are soluția $(1,1,1)$.

(5p) b)Să se determine a,b astfel încât sistemul să fie incompatibil.

(5p) c)Să se arate că pentru orice $a\in\mathbb{Z}$, există $b\in\mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să admită soluții cu tóate componentele întregi.

2. Se consideră polinomul $f=X^5-2X^4-X^3+6X^2-3X-10\in\mathbb{C}[X]$.

(5p) a)Să se determine o rădăcină întregă a polinomului f.

(5p) b)Calculați $(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_1-x_5)^2+(x_2-x_3)^2+...+(x_4-x_5)^2$, unde $x_1,x_2,....,x_5$ sunt rădăcinile polinomului f.

(5p) c)Să se arate că f are o singură rădăcină reală.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+1001x-2012$.

(5p) a)Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}$ ecuația $f(x)=2+\dfrac{1}{n+2012}$ are soluție unică $x_n\in\mathbb{R}$.

(5p) b)Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$, unde x_n este precizat la a).

(5p) c)Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}n(x_n-2)$, unde x_n este precizat la a).

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1+x+x^2+...+x^{2010}$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

(5p) a)Să se arate că funcția F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(5p) b)Să se arate că funcția F este bijectivă.

(5p) c) Să se calculeze $\int_0^a F^{-1}(x)dx$, unde F^{-1} este inversa funcției F și $a=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{2011}$.

100 variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 61

Prof. Pascotescu Camelia

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**
-

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze $\sqrt{49}+\sqrt[3]{-1000}+(\sqrt{3})^2$.

(5p) 2. Să se determine valorile reale ale lui m , ştiind că soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei $x^2+mx-m+1=0$ verifică relaţia $2(x_1+x_2)+x_1x_2=3$.

(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia $9^{2x}=3^{x^2}$.

(5p) 4. Rezolvaţi in R ecuaţia $\sqrt{2x-1}=2-x$

(5p) 5. Aflati aria triunghiului determinat de punctele A(1,3) , B(-2, 4) , C(6,3) .

(5p) 6. Ştiind că $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $\cos x=-\frac{1}{3}$, să se calculeze $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+ay+2z=1 \\ 9x+a^2y+4z=1 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ şi se notează cu A matricea sistemului.

(5p) a) Calculaţi determinantul matricei A .

(5p) b) Determinaţi valorile reale ale numărului a pentru care matricea A este inversabilă.

(5p) c) Pentru $a=1$, rezolvaţi sistemul.

2. Fie $H=\left\{X\in M_3(\mathbb{Z}_5)\,|\,X=\begin{pmatrix}\hat{0} & a & b\\ \hat{0} & \hat{1} & a\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\right\}$.

(5p) a) Aflaţi numărul de elemente al mulţimii H .

(5p) b) Arătaţi că dacă $A,B\in H$ atunci $A\cdot B\in H$.

(5p) c) Rezolvaţi în mulţimea H ecuaţia $X^3=I_3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x>0$.

(5p) a) Calculaţi $f'(x)$.

(5p) b) Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f .

(5p) c) Arătaţi că $3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră integralele $I_n=\int_0^1\frac{x^{2n}}{x^2+1}\,dx$

(5p) a) Calculaţi I_1, I_2 .

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) b) Să se demonstreze că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{2n+1},\forall n\in\mathbb{N}$.

(5p) c) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Varianta 62

Prof. Pascotescu Camelia

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $2\overline{z}+z=3+2i$.

(5p) 2. Ştiind că x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2+3x+1=0$, să se calculeze $x_1^2+x_2^2$.

(5p) 3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $1+2^x-2\cdot 4^x=0$.

(5p) 4. Să se calculeze numărul submulţimilor cu 3 elemente ale unei mulţimi cu 5 elemente.

(5p) 5. Calculaţi distanţa de la punctul $A(1;3)$ la dreapta de ecuaţie $d: 2x+3y-1=0$.

(5p) 6. Ştiind că $\sin x+\cos x=1$, aflaţi $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În mulţimea S_4 a permutărilor de gradul 4 se consideră

$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$ şi $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$.

(5p) a) Să se calculeze $\alpha\circ\beta$.

(5p) b) Să se determine $x\in S_4$ astfel încât $x\circ\alpha=\beta$.

(5p) c) Să se arate că nu există $x\in S_4$ astfel ca $x^4=\alpha$.

2. Se consideră polinomul $f=(1+X+X^3)^{30}\in\mathbb{Z}[X]$ cu forma algebrică

$f=a_{30}X^{30}+\ldots+a_1X+a_0$.

(5p) a) Să se calculeze $f(-1)+f(1)$.

(5p) b) Să se arate că suma $a_0+a_1+\ldots+a_{30}$ este divizibilă cu 3 .

(5p) c) Să se determine restul împărţirii lui f la X^2-1 .

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x}{x^2}$.

(5p) a) Determinaţi $f'(x)$.

(5p) b) Studiaţi monotonia funcţiei f.

(5p) c) Arătaţi că $2e^{\sqrt{3}}<3e^{\sqrt{2}}$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

2. Fie $I_1=\int\frac{\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx$ $I_2=\int\frac{\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$

(5p) a) Să se calculeze $2I_1+3I_2$.

(5p) b) Să se calculeze $2I_2-3I_1$.

(5p) c) Să se determine I_1 şi I_2 .

100 Variante BAC 2014 www.mateinfo.ro

Varianta 63

Prof. Pascotescu Camelia

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie funcţia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=(-1)^x+(-2)^{x+1}$. Calculaţi $f(3)$.

(5p) 2. Arătaţi că $\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

(5p) 3. Fie funcţia $f:\{1,2,3\}\to\{-1,-2,-3\}$, f injectivă . Calculaţi suma $f(1)+f(2)+f(3)$.

(5p) 4. Să se afle numărul real m pentru care graficul funcţiei $f=3x^2-(m+2)x+7$ are axa de simetrie x=1.

(5p) 5. În plan se consideră punctele $A(2,3),B(1,0)$ şi $C(-1,4)$. Arătaţi că vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ sunt perpendiculari.

(5p) 6. Determinaţi ecuaţia medianei din B a triunghiului cu vârfurile $A(-1,2),B(2,-3),C(1,-4)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}x+2y+z=1\\2x-y+z=1\\7x-y+bz=a\end{cases}$ unde $a,b\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se determine b astfel încât rangul matricei sistemului să fie 2 .

(5p) b) Să se determine a şi b pentru care sistemul este incompatibil .

(5p) c) Să se rezolve sistemul in cazul in care este compatibil nedeterminat .

2. Se consideră mulţimea G a matricelor $A(a)=\begin{pmatrix}1&0&\ln a\\0&a&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $a\in(0;\infty)$.

(5p) a) Să se arate că $(G,\cdot)$ are o structură de grup abelian .

(5p) b) Să se calculeze $A(a)^{2011}$.

(5p) c) Să se demonstreze că grupul $(G,\cdot)$ este izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$.

(5p) a) Să se calculeze derivata funcţiei f.

(5p) b) Să se determine imaginea funcţiei f .

(5p) c) Să se demonstreze inegalitatea $e\cdot\ln x\le 2\sqrt{x},\forall x\in(1;\infty)$.

2. Fie Şirul $(I_n)_{n\ge 1}$ definit prin $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} t\,dt$, $n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Să se calculeze I_1 .

(5p) b) Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{2n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) c) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este convergent la 0 .

Varianta 64

Prof: Pisică Lăcrămioara

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinați cardinalul mulțimii $A=\left(\log_{\frac{5}{3}} 2,\sqrt[3]{9}\right)\cap\mathbb{N}$.

(5p) 2. Determinați valorile naturale nenule ale lui m pentru care parabola $y=x^2+3x+m$ admite un minim pozitiv.

(5p) 3. Determinați soluțiile reale ale ecuației $\log_2\left(3\cdot 2^x+4\right)=x+2$

(5p) 4. Ce termen al dezvoltării $\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^9$ nu-l conține pe x ?

(5p) 5. Să se determine coordonatele capetelor unui segment știind că punctele $M(-1,1)$ și $N(-3,4)$ împart segmentul în trei părți egale.

(5p) 6. Verificați dacă triunghiul ABC cu AB=6 cm , AC=8 cm şi BC=5 cm este obtuzunghic?

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+m^2y+2mz=-2\\ 2mx+y+m^2z=7\\ m^2x+2my+z=-5\end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Determinați valorile parametrului real m pentru care sistemul este compatibil determinat.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) b) Știind că soluția sistemului este (x_0, y_0, z_0) să se demonstreze că $x_0 + y_0 + z_0 = 0$ pentru orice $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(5p) c) Pentru $m = -1$ rezolvați sistemul în $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. Se consideră mulțimea $G = \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ și legea de compoziție "$\circ$" pe G definită prin $x \circ y = axy + bx + by + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Determinați a, b și c știind că legea "$\circ$" admite pe -1 ca element neutru iar simetricul lui $\frac{1}{2}$ este $-\frac{11}{8}$

(5p) b) Pentru $a = 2$, $b = c = 3$ rezolvați pe mulțimea G ecuația $x \circ x \circ x = x$

(5p) c) Pentru $a = 2$, $b = c = 3$ demonstrați că funcția $f : G \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(mx + n)$, unde m și n sunt convenabil alese, este izomorfism de la grupul $(G, \circ)$ la grupul $(\mathbb{R}, +)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 3| + \ln x$

(5p) a) Studiați derivabilitatea funcției pe domeniul de definiție.

(5p) b) Stabiliți eventualele puncte de extrem local ale funcției f.

(5p) c) Determinați tangenta la graficul funcției ce este paralelă cu prima bisectoare.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$

(5p) a) Calculați $\int_1^{16} f\left(-\sqrt[4]{x}\right) dx$.

(5p) b) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a subgraficului funcției $g : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[4]{-f(x)}$

(5p) c) Fie șirul $a_n = \int_n^{n+1} \frac{f(x+1)}{x^2} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați $\lim_{n \to \infty} (a_n)^{n^2}$

Varianta 65

Prof: Pisică Lăcrămioara

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze suma primilor patru termeni ai unei progresii geometrice dacă $a_3 = 3$ și $a_4 = -2$.

(5p) 2. Să se determine inversa funcției bijective $f:\mathbb{R}\to(-1,\infty)$, $f(x)=\log_2\left(3^x+1\right)-1$.

(5p) 3. Să se rezolve ecuația $\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}}=\frac{1}{5}$ în mulțimea numerelor reale

(5p) 4. Câte submulțimi de trei elemente ale mulțimii $\{0,1,2,...,9\}$ conțin un singur element impar ?

(5p) 5. Se dau punctele $A(1,2)$ și $B(2,1)$. Să se determine coordonatele punctului C știind că aparține axei ordonatelor iar aria triunghiului ABC este egală cu 1 .

(5p) 6. Dacă $a,b\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $tga=\frac{1}{7}$, $tgb=\frac{1}{3}$ demonstrați că $a+2b=45°$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}6 & 6\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ și $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $A,X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

(5p) a) Arătați că $X^2-(a+d)X+(ad-bc)I_2=O_2$, $\forall X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(5p) b) Determinați matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ce îndeplinesc simultan condițiile $AX=XA$ și $\det(X)=0$

(5p) c) Rezolvați ecuația $X^4=A$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Fie polinomul $f=X^4+(2-m)X^3+(3-m)X^2-2(1+m)X+4(m-1)$, $f\in\mathbb{C}[X]$, $m\in\mathbb{C}$.

(5p) a) Arătați că f este divizibil cu $X-1$ pentru orice $m\in\mathbb{C}$,

(5p) b) Pentru $m=2-i$ determinați partea imaginară a numărului $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4$.

(5p) c) Determinați $m\in\mathbb{C}$ știind că f admite ca rădăcină pe $1-i$ și apoi rezolvați ecuația $f(x)=0$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+x$.

(5p) a) Arătați că f este injectiva dar un este surjectivă .

(5p) b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției în punctul în care acesta intersectează axa absciselor .

(5p) c) Determinați asimptotele la graficul funcției f .

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$.

(5p) a) Calculați $\int_0^1 f(x+2)\cdot e^x dx$

(5p) b) Determinați aria suprafeței delimitate de graficul funcției $g:[0,2]\to\mathbb{R}$,

$g(x)=\frac{f(x+2)}{x+1}\cdot e^{x^2-2x+1}$ și axa Ox

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) c) Demonstrați că $\int_1^3 \left(x^2-4x+3\right)^n dx = 2\cdot\int_0^1 \left(x^2-1\right)^n dx \quad , \forall n\in\mathbb{N}^*$

Varianta 66

Prof: Pisică Lăcrămioara

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinați numerele complexe de modul 5 ce au partea imaginară egală cu $\left[\log_{0,5} 5\right]$, unde $\left[a\right]$ reprezintă partea întreagă a numărului a .

(5p) 2. Determinați valorile reale ale lui m astfel încât între rădăcinile ecuației $x^2+mx+m+2=0$ să existe relația $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=-1$.

(5p) 3. Rezolvați în mulțimea $\left[0,2\pi\right)$ ecuația $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos x$.

(5p) 4. Determinați numerele naturale $n\geq 3$ care verifică relația $C_n^3=2C_n^2$.

(5p) 5. Aflați aria unui pătrat ce are două dintre laturile sale situate pe dreptele de ecuații $3x+4y-7=0$ respectiv $6x+8y+1=0$.

(5p) 6. Știind că $tgx=2$ calculați $\frac{3\sin x}{2\sin x+5\cos x}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricele $A,X\in\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right)$, $A=\begin{pmatrix} a & a+2 & a+4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(5p) a) Arătați că ecuația $A\cdot X=O_3$ are soluție unică pentru orice întreg a .

(5p) b) Pentru $a=0$ rezolvați ecuația $A\cdot X=I_3$.

(5p) c) Pentru $a\in\mathbb{Z}$ arătați că sistemul $\begin{cases} ax+(a+2)y+(a+4)z=2a \\ x+3y+4z=1 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases}$ are soluție unică în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ce un depende de a .

2. Fie mulțimea $A=\left\{f\in\mathbb{Z}_5\left[X\right]\,|\,f=X^4+aX^3+bX^2+4 \quad , \quad a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$

(5p) a) Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare un polinom de gradul 4 din $\mathbb{Z}_5\left[X\right]$ acesta să fie din mulțimea A .

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) b) Determinați $a,b\in\mathbb{Z}_5$ știind că $\hat{2}$ este rădăcină a polinomului f și că restul împărțirii lui $f\left(X+\hat{1}\right)$ la $X+2$ este $\hat{3}$.

(5p) c) Pentru $a=b=\hat{0}$ descompuneți în factori ireductibili polinomul f peste $\mathbb{Z}_5$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $a\in\mathbb{R}^*$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+1}$.

(5p) a) Arătați că pentru orice $a\in\mathbb{R}^*$ funcția are două puncte de extrem .

(5p) b) Determinați valorile lui $a\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\operatorname{Im} f=[-1,3]$

(5p) c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{f'(x)}}$, $\forall a\in\mathbb{R}^*$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$

(5p) a) Calculați $\int\limits_0^1 xf(x)dx$

(5p) b) Arătați că $2\sqrt{e}\le\int\limits_0^1 f(x)dx+\int\limits_0^1\dfrac{e}{f(x)}dx\le 1+e$

(5p) c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^{x^2} f(t)dt}{f(x)-1}$

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 67

Prof: Pisică Lăcrămioara

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinați primul termen al progresiei aritmetice ce are rația egală cu triplul primului termen , iar $a_6 + a_8 = 19$.

(5p) 2. Găsiți două funcții de gradul întâi , de monotonii diferite astfel încât $f \circ g = g \circ f$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(5p) 3. Determinați soluțiile întregi nenule ale inecuației $(\log_3 2)^{x^2-x} > (\log_3 2)^{x+3}$.

(5p) 4. Determinați câte numere naturale de două cifre sunt divizibile cu 4 sau cu 6 .

(5p) 5. Determinați ecuația mediatoarei segmentului de capete $A(1,2)$ și $B(2,1)$.

(5p) 6. Fie paralelogramul ABCD. Considerăm punctele M și N pe AB și respectiv AC astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Arătați că punctele M , N și D sunt coliniare .

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În mulțimea $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = A - 2I_2$.

(5p) a) Determinați cea mai mică valoare a numărului natural nenul k pentru care $B^n = O_3, \forall n \geq k$.

(5p) b) Calculați $A^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) c) Demonstrați că $7 \cdot \sum_{k=1}^{1005} \det(A^k) \leq 3^{2012}$

2. Se consideră matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \left\{ X_a = I_2 + aA, a > -\frac{1}{2} \right\}$.

(5p) a) Demonstrați că G este parte stabilă a lui $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

(5p) b) Demonstrați că funcția $f : G \to \mathbb{R}$, $f(X_a) = \ln(2a+1)$ este izomorfism de la grupul $(G, \cdot)$ la grupul $(\mathbb{R}, +)$.

(5p) c) Arătați că $X_{\frac{1}{2}} \cdot X_{\frac{3}{2}} \cdot X_{\frac{5}{2}} \cdot \ldots \cdot X_{\frac{2n-1}{2}} = X_{\frac{2^n \cdot n! - 1}{2}}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$

(5p) a) Studiați monotonia funcției f .

(5p) b) Arătați că f este inversabilă și calculați $g'(0)$, unde $g = f^{-1}$

(5p) c) Rezolvați ecuația $f(x)+f\left(x^3\right)=f\left(x^2\right)+f\left(x^4\right)$.

2. Se consideră șirul $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ având termenul general $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1}dx$

(5p) a) Calculați I_3 și I_1

(5p) b) Arătați că șirul $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ este convergent și , apoi, calculați limita sa .

(5p) c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n^k\cdot I_n$, $k\in\mathbb{R}$

Varianta 68

Prof: RAT CRISTINA

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze modulul numărului complex :

$$z=\frac{1+3i}{2-5i}$$

(5p) 2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația :

$$2^{x+1}+2^{x+2}+3\cdot 2^{x+3}=1920$$

(5p) 3. Fie $f(x)=2x^2+\cos x$, $f:R\to R$, să se demonstreze că f este funcție pară.

(5p) 4. Să se determine termenul de rang 8 al dezvoltării:

$$(\sqrt[3]{x}+\frac{y}{x^2})^{10}$$

(5p) 5. Fie dreptele $d_1:(m+1)x+4y-5=0$ și $d_2:(2m-3)x-2y+1=0$, să se determine $m\in R$ astfel ca dreptele să fie paralele.

(5p) 6. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului care are lungimile laturilor 8,11,13.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie matricea $A\in \mathcal{M}_3(R)$ unde $A=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,cu $x_1<x_2$ radacinile ecuatiei

$x^2-3x+2=0$; y_1, y_2 reprezinta primele numere naturale consecutive $t_1=C_3^1, t_2=A_3^1$.

(5p) a) Calculati elementele matricei A.

(5p) b) Calculati matricea A^2-2A.

(5p) c) Determinati inversa matricei A.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

2. Pe multimea numerelor reale se defineste legea de compozitie $x*y=3xy-3x-3y+4$.

(5p) a) Arătați ca intervalul $(1,\infty)$ este parte stabila a lui R in raport cu legea data.

(5p) b) Considerand legea asociativă să se determine simetricul elementului 3.

(5p) c) Să se rezolve in mutțimea numerelor reale ecuația $x*x*x=73$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se dă funcția $f:[3;+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}-x$.

(5p) a) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

(5p) b) Să se demostreze că f este concava pe intervalul $(3;+\infty)$

(5p) c) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției in punctul de abscisa 4.

2. Se consideră șirulul $(I_n)_{n\geq 1}$ unde $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+1}dx$.

(5p) a) Să se calculeze I_1.

(5p) b) Să se demonstreze că are loc egalitatea:

$$I_{n+2}+I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}, n\in\mathbb{N}^*$$

(5p) c) Folosind faptul că $(I_n)_{n\geq 1}$ este un șir descrescător , să se demonstreze :

$$\frac{1}{3(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{3(n-1)}.$$

Varianta 69

Prof: RAT CRISTINA

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze suma 2+5+8+.....+110.

(5p) 2. Fie $f:R\to R$, $f(x)=x^2+6x-5$, să se determine imaginea funcției.

(5p) 3. Să se calculeze $A_4^2-2\cdot C_4^3+P_2$.

(5p) 4. Fie $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+5\vec{j}$ și $\overrightarrow{OB}=-3\vec{i}+4\vec{j}$, să se calculeze cosinusul unghiului format de cei doi vectori.

(5p) 5. Se consideră mulțimea A={1,2,3,7} , să se determine câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii A.

(5p) 6. Știind că $\sin x=\frac{1}{3}$, să se calculeze tg^2x.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră permutările $\alpha,\beta\in S_5$ cu $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&1&4&2\end{pmatrix} si \beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&2&1&4\end{pmatrix}$

(5p) a) Calculați $\alpha\beta$.

(5p) b) Rezolvați ecuația x $\alpha^{2011}=\beta$.

(5p) c) Determinați ordinul permutării α.

2. Fie polinoamele cu coeficienți reali f= $x^{6n+2}+x^{3n+1}+1$ si g= x^2+x+1.

(5p) a) Determinați rădăcinile polinomului g.

(5p) b) Să se determine a,b numere reale astfel incât g•$\left(2ax+b\right)=2ax^3+7x(x+1)+3$

(5p) c) Să se demonstreze că polinomul f se divide cu polinomul g.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2-3x+2)}{x^2-1};x<1\\ \dfrac{5ax-3}{x+4};x\geq 1\end{cases}$.

(5p) a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel incât f continuă în $x_0=1$.

(5p) b) Dacă a=1 și x>1 să se demonstreze egalitatea $f''(x)+2f'(x)\cdot\dfrac{1}{x+4}=0$.

(5p) c) Să se arate că f(2010)≤f(2012).

2. Se consideră funcția $f_n(x)=e^x(x+1)^n$, $f:R\to R$.

(5p) a) Să se calculeze $\int_0^1 f_1(x)dx$.

(5p) b)Să se determine o relație de recurență pentru funcțiile f_n.

(5p) c) Să se calculeze limita : $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[e^{\frac{1}{n}}\left(1+n\right)+e^{\frac{2}{n}}\left(2+n\right)+....+e^{\frac{n}{n}}\left(n+n\right)\right]$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 70

Prof. RAT CRISTINA

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze $(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})^9$.

(5p) 2. Fie $f:R\to R$, $f(x)=x^2+(3m-1)x+m, m\in R$. Determinați $m\in R$ cu graficul funcției f este tangent axei Ox.

(5p) 3. Fie $a=\log_3 5, b=\log_3 2$, să se arate că $\log_{30} 200=\frac{2a+3b}{1+a+b}$.

(5p) 4. Probabilitatea ca alegând un număr de două cifre , acesta să conțină 7.

(5p) 5. Să se determine aria $\triangle ABC$ unde A(1,3), B(2,-5) și C(0,-3).

(5p) 6. Să se calculeze cos $\sphericalangle B$ dacă AB=6, BC=9 și AC=13.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie sistemul liniar $\begin{cases}(m+1)x-y+4z=12\\ x+y-mz=0\\ 3x+y-2z=m-2\end{cases}$, să se indeplinească următoarele cerințe:

(5p) a) Aflați $m\in\mathbb{R}$ pentru care determinantul matricii sistemului este -9.

(5p) b) Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel ca soluția sistemului să fie (1,2,3).

(5p) c) Pentru m=2 să se rezolve sistemul.

2. Fie inelul $(Z_8,\oplus,\otimes)$, să se indeplinească urmatoarele cerințe:

(5p) a) Să se rezolve ecuația : $\hat{4}x+\hat{2}=\hat{6}, x\in Z_8$.

(5p) b) Să se demonstreze că $(\forall)\hat{a},\hat{b}\in Z_8$ are loc relația $\hat{3}(2\hat{a}+4\hat{b})+\hat{2}(5\hat{a}+2\hat{b})=\hat{0}$

(5p) c) Să se calculeze A^2 în inelul $(Z_8,\oplus,\otimes)$ unde :

$$A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} & \hat{2}\\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{1}\\ \hat{3} & \hat{4} & \hat{5}\end{pmatrix}.\ A^2=A\cdot A$$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f(x)=\ln(2x+4)-\ln(x+3), f(x):(-2;+\infty)\to\mathbb{R}$:

(5p) a) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}[f'(1)+f'(2)+f'(3)+....+f'(n)]$.

(5p) c) Să se demonstreze că $f(x)\le \ln 2 \forall x\in(-2;+\infty)$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

2. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases}2x+\ln(1-x)+1, x\in(-\infty;0)\\ 3a, x=0\\ \sqrt{x}+e^x, x\in(0;+\infty)\end{cases}$

(5p) a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ când funcția admite primitive.

(5p) b) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+\frac{2}{n^2}\sqrt{\left(\frac{2}{n}\right)^2+1}+....+\frac{n}{n^2}\sqrt{\left(\frac{n}{n}\right)^2+1}\right)\cdot n$.

Varianta 71

Prof: RICU ILEANA

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Pentru ce valori $a\in\mathbb{R}$ există $x\in\mathbb{R}$ astfel încât numerele *m,n,p,*unde $m=5^{1+x}+5^{1-x}$, $n=\frac{a}{2}$ și $p=25^x+25^{-x}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

(5p) 2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\frac{mx^2+2(m+1)x+m-2}{x^2+1}$ .Să se determine mulțimea $A=\{m\in\mathbb{R}/\ f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\}$

(5p) 3. Se ia la întamplare un număr *x* din mulțimea $M=\{x/\ x\in\mathbb{Z},|x|\le 7\}$. Să se scrie evenimentul contrar lui A, unde A= *x* verifică ecuația $x^2-5|x|+4=0$.

(5p) 4.Să se calculeze suma coeficienților pentru binomul $(17x^5-18y)^{2012}$.

(5p) 5. Considerăm vectorii $\vec{m}=2\vec{i}-3\vec{j};\vec{n}=-\vec{i}+2\vec{j};\vec{p}=4\vec{j}$ .Calculați $|\vec{a}+\vec{b}|$ știind că $\vec{a}=3\vec{m}-2\vec{n}+\vec{p}$ și $\vec{b}=-2\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}$

(5p) 6. Să se calculeze $tg\left(\arcsin\frac{4}{5}+arctg\frac{7}{24}\right)$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

1.Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_{12},+,\cdot)$ şi matricea $A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} & \hat{5}\\ \hat{x} & \hat{1} & \hat{2}\\ \hat{4} & \hat{3} & \hat{1}\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{Z}_{12})$

(5p) a) Calculaţi suma elementelor inversabile din $\mathbb{Z}_{12}$

(5p) b)Arătaţi că matricea A este inversabilă $\forall x\in\mathbb{Z}_{12}$.

(5p) c)Pentru $x=\hat{0}$, rezolvaţi în $M_3(\mathbb{Z}_{12})$ ecuaţia $YA=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} & \hat{2}\\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{2} & \hat{1}\end{pmatrix}$

2.Fie $f\in\mathbb{R}[X], f=(X^2+X+1)^n=\sum_{k=0}^{2n}a_kX^k$

(5p) a) Să se afle $a_1+a_3+....+a_{2n-1}$

(5p) b) Să se afle restul împărţirii lui f la $(X+2)^2$.

(5p) c) Să se rezolve în C acuaţia f(x)=f(-x).

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\ln(1+x)$

(5p) a) Arătaţi că f este strict crescătoare pe domeniul său de definiţie.

(5p) b) Arătaţi că,pentru $\alpha\in(-1,0)$, avem $A(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2}-\alpha+(\alpha+1)\ln(\alpha+1)$, unde $A(\alpha)$ reprezintă aria suprafeţei cuprinsă între graficul lui f,axa Ox,şi dreptele $x=\alpha$ şi $x=0$

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{\alpha\to-1}A(\alpha)$

2. Fie şirul $(I_n)_{n\geq0}$ dat de $I_0=\int_1^e xdx$,iar $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n dx$.

(5p) a)Calculaţi I_0 şi I_1.

(5p) b) Pentru $n\in\mathbb{N}^*$,arătaţi că $2I_n+nI_{n-1}=e^2$

(5p) c) Ştiind că şirul $(I_n)_{n\geq0}$ este descrescător, arătaţi că $\frac{e^2}{n+3}\leq I_n\leq\frac{e^2}{n+2}$

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 72

Prof: RICU ILEANA

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

100 variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine $x\in\mathbb{N}$ astfel încât numerele $2C_{x-3}^{0};C_{x-1}^{2};C_{x}^{x-2}$ să fie în progresie aritmetică.

(5p) 2. Fie ecuaţia $x^2+2(m-1)x+8(m^2-1)=0, m\in\mathbb{R}$ .Pentru ce valori ale lui *m* suma pătratelor rădăcinilor are valoarea maximă?

(5p) 3. Fie mulţimea $M=\{x/\ x\ este\ un\ divizor\ pozitiv\ al\ lui\ 60\}$. Să se scrie evenimentul A, unde A= expresia $\sqrt[x]{\dfrac{2x^2+x-21}{5-4x-x^2}}$ dă un număr real dacă $x\in M$.

(5p) 4.Determinaţi partea reală a numărului complex $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

(5p) 5. Să se determine termenul al patrulea al dezvoltării $(2x^2-5y)^n$ ştiind că suma coeficienţilor binomiali este 32.

(5p) 6. Determinaţi valoarea parametrului $a\in\mathbb{R}$ pentru care punctele $A(2a;a), B(4;0)$ şi $C(0;2)$ sunt coliniare.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie $M=\left\{\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ -\hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}\middle|\ \hat{a},\hat{b}\in\mathbb{Z}_3\right\}$

(5p) a)Să se arate că ,dacă $\hat{a},\hat{b}\in\mathbb{Z}_3$,atunci $\hat{a}^2+\hat{b}^2=\hat{0}\Leftrightarrow\hat{a}=\hat{b}=\hat{0}$.

(5p) b) Să se determine $A\in M$ astfel încât $A^2+I_2=O_2$.

(5p) c)Stabiliţi câte elemente ale lui M sunt matrice inversabile.

2.În mulţimea permutărilor cu 3 elemente S_3 se consideră permutările $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ şi $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$

(5p) a) Să se verifice dacă $\sigma\tau=\tau\sigma$

(5p) b) Să se studieze paritatea celor două permutări.

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia $\sigma x=\tau$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.Se consideră funcţia $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$,unde *D*este domeniul maxim de definiţie al funcţiei *f*.

(5p) a)Stabiliţi domeniul maxim de definiţie al funcţiei *f* şi determinaţi ecuaţiile asimptotelor lui *f.*

(5p) b) Să se arate că funcţia *f* este strict descrescătoare pe domeniul său.

(5p) c) Să se calculeze limita şirului cu termenul general $x_n = \frac{f(1)+f(2)+f(3)+.....+f(n)}{n}$.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$, $n \in \boldsymbol{N}$.

(5p) a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

(5p) b) Să se arate că $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, (\forall)\, n \in \boldsymbol{N}, n \geq 2$.

(5p) c) Să se calculeze volumul corpului de rotaţie determinat de funcţia $f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \to [0;1], f(x) = \cos x$,în jurul axei Ox.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 73

Prof: RICU ILEANA

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se afle cele 4 unghiuri ale unui patrulater ştiind că aceste unghiuri sunt în progresie geometrică şi că ultimul este de 9 ori mai mare decât al doilea.

(5p) 2. Fie funcţia de gradul al doilea $f_m(x) = mx^2 - (2m-1)x + m - 1$,$m \neq 0$. Să se determine m astfel încât vârful parabolei asociate acestei funcţii să se găsească pe prima bisectoare.

(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia $\left[\frac{x+3}{4}\right] = \frac{x-2}{3}$

(5p) 4. Să se determine $n \in \mathbb{Z}$ ştiind că se verifică egalitatea $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n + \left(1-i\sqrt{3}\right)^n = 2^n$

(5p) 5. Să se determine suma termenilor raţionali ai dezvoltării $\left(\sqrt{2}+1\right)^5$.

(5p) 6.Să se determine cosinusul celui mai mare unghi al $\triangle ABC$,unde A(2,3),B(-1,2),C(1,-3).

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $\Delta(x) = \begin{vmatrix} e^{2x^2} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x^2} \\ e^{-x} & e^{-x^2} & e^{2a} \end{vmatrix}, a \in \mathbb{R}$

(5p) a) Arătaţi că $\Delta(x)=e^{2\left(x^2+x+a\right)}+2e^{-\left(x^2+x+a\right)}-3$.

(5p) b) Să se determine valorile parametrului real *a*pentru care ecuaţia $\Delta(x)=0$ are rădăcini reale strict negative.

(5p) c) Arătaţi că pentru a=1 avem $\Delta(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$

2. Pe mulţimea Z se consideră legile de compoziţie $x\perp y=x+y+1,\quad x\circ y=ax+by-1,$ cu $a,b\in Z$ şi funcţia $f:Z\to Z$ definită prin $f(x)=x+2.$

(5p) a) Să se demonstreze că $x\perp(-1)=(-1)\perp x=x,\ \forall x\in Z$.

(5p) b) Să se determine $a,b\in Z$ pentru care legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă

(5p) c) Dacă $a=b=1$ să se arate că funcţia *f* este morfism între grupurile $(Z;\perp)$ şi $(Z,\circ)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{m}{2}\right\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{mx}{x-|x|+m}$, unde $m>0$ este un număr real fixat.

(5p) a)Determinaţi asimptotele funcţiei *f*.

(5p) b)Demonstraţi că *f* este strict crescătoare pe $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{m}{2}\right\}$

(5p) c) Arătaţi că *f* admite o singură soluţie reală .

2. Se consideră şirul $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tgx)^n\,dx, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$

(5p) a)Să se demonstreze că $I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ şi să se calculeze apoi I_2.

(5p) b)Să se arate că $I_n\geq 0$,să se stabilească monotonia şi să se precizeze dacă şirul este convergent.

(5p) c)Demonstraţi că $I_{n+2}\leq\frac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ şi calculaţi limita şirului $(I_n)_{n\geq 2}$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 74

Prof : Şerban George-Florin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1.Dacă a=1+i , i=$\sqrt{-1}$, arătaţi că numărul a^2-2a+1 este un număr real .

(5p) 2.Fie funcţia $f:R\to R$, f(x)=2x-1 . Calculaţi $f(f(1))-f^{-1}(f(1))$.

(5p) 3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $8^x-27=0$.

(5p) 4. Care este probabilitatea ca alegând un număr oarecare de două cifre acesta să fie cub perfect.

(5p) 5. Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=\vec{i}-\vec{j}$ şi $\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}$. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{BC}$.

(5p) 6. Fie ΔABC cu AB= 7 cm , BC= 8 cm şi AC= 9 cm . Calculaţi raza cercului circumscris ΔABC .

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -a\\ a & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in R$.

(5p) a) Calculaţi determinantul matricei A^3 .

(5p) b) Calculaţi $A^2-2\cdot A+(a^2+1)\cdot I_2$.

(5p) c) Calculaţi $(a^2+1)\cdot A^{-1}-2\cdot I_2$.

2. Fie polinomul $f=x^3-x^2-x-5$.

(5p) a) Aflaţi restul împărţirii polinomului f la polinomul g=x+2 .

(5p) b) Dacă x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f , calculaţi $(2+x_1)\cdot(2+x_2)\cdot(2+x_3)$.

(5p) c) Arătaţi că polinomul f nu are rădăcini întregi .

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

(5p) a) Calculaţi $f'(x)$.

(5p) b) Aflaţi ecuaţia asimtotei oblice la ∞ a funcţiei f .

(5p) c) Calculaţi limita la ∞ a şirului $a_n=f(1)+f(2)+.....+f(n)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_1^2(x-1)^n\cdot e^x dx$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) a) Calculaţi I_1 .

(5p) b) Arătaţi că $I_n = e^2 - n \cdot I_{n-1}$, pentru orice număr natural $n \geq 2$.

(5p) c) Arătaţi că $I_n \leq e$, pentru orice $n \in N^*$.

Varianta 75

Prof. : Şerban George-Florin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1.Dacă şirul $a_1, a_2, ..., a_n$ este o progresie aritmetică cu $a_3 = 10$ şi $a_5 = 16$ .Calculaţi a_{50} .

(5p) 2. Fie funcţia $f : R \to R$, $f(x) = x^2 - 1$. Calculaţi minimul funcţiei f .

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $27^{x+2} = 81$.

(5p) 4. Care este probabilitatea ca alegând un număr oarecare de două cifre , produsul cifrelor să fie un număr prim .

(5p) 5. În reperul cartezian xoy se consideră punctele A (1 ,-1) şi B (-2 ,3) . Aflaţi coordonatele punctului M ştiind că $\overrightarrow{AM} = 5 \cdot \overrightarrow{MB}$.

(5p) 6. Dacă $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, rezolvaţi ecuaţia $sin^3 x = cos^3 x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \in M_3(R)$.

(5p) a) Aflaţi $x \in R$ pentru care matricea A(x) este singulară .

(5p) b) Calculaţi $A(x) \cdot A(-x)$.

(5p) c) Calculaţi $A^{-1}(2)$.

2. Fie legea de compoziţie $x \circ y = \sqrt{x^2 \cdot y^2 - x^2 - y^2 + 2}$, $\forall x, y \in (1, \infty)$.

(5p) a) Calculaţi $2 \circ 3$.

(5p) b) Studiaţi dacă legea $\circ$ admite element neutru .

(5p) c) Rezolvaţi ecuaţia $x \circ x \circ x \circ x = 2$, $x \in (1, \infty)$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:R\to R$, $f(x)=e^x-x-1$.

(5p) a) Calculaţi derivata funcţiei f .

(5p) b) Aflaţi punctul de extrem al funcţiei f .

(5p) c) Arătaţi că $e^{\sqrt{2}}>\frac{12}{5}$.

2. Fie funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

(5p) a) Aflaţi o primitivă a funcţiei f , notată $F:R\to R$, cu $F(\sqrt{e-1})=\frac{3}{2}$, unde e este baza logaritmului natural .

(5p) b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\cdot f(x)dx$.

(5p) c) Calculaţi $\int(x^4+1)\cdot e^x\cdot f(x^2)dx$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 76

Prof. : Serban George-Florin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Dacă şirul $a_1,a_2,.....,a_n$ este o progresie aritmetică cu $a_3=16$ şi $a_5=26$ .Calculaţi suma primilor 10 termeni ai şirului .

(5p) 2. Fie funcţia $f:R\to R$, $f(x)=-x^2+1$. Aflaţi coordonatele punctului de maxim al funcţiei f .

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $log_2(x-5)=2$.

(5p) 4.Câte numere de trei cifre distincte $\overline{abc}$ se pot forma ştiind că $a,b,c\in\{0,1,2,3,4\}$

(5p) 5. În reperul cartezian xoy se consideră punctele A (2 ,-1) şi B (-2 ,3) . Aflaţi coordonatele punctului M ştiind că $\overrightarrow{AM}=2\cdot\overrightarrow{MB}$.

(5p) 6. Dacă $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, rezolvaţi ecuaţia $cos^2x=cos2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}\in M_3(R)$.

(5p) a) Calculaţi $det(A^{10})$.

(5p) b) Calculaţi $A(x)+A^2(x)+A^3(x)+A^4(x)$.

(5p) c) Calculaţi rangul matricei $A(2)\cdot {}^tA(2)$.

2. Fie polinomul $f=x^4+16$.

(5p) a) Dacă x_1,x_2,x_3,x_4 sunt rădăcinile polinomului f, calculaţi $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

(5p) b) Aflaţi restul împărţirii polinomului f la polinomul g=x-i-1 , i=$\sqrt{-1}$.

(5p) c) Arătaţi că polinomul f este reductibil in R[x].

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:R\to R$, f(x)=x –arctgx .

(5p) a) Calculaţi derivata a doua a funcţiei f .

(5p) b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

(5p) c) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul O (0,0).

2. Fie funcţia $f_n:R\to R$, $f_n(x)=x^n\cdot arctg(x)$, unde $n\in N$ şi $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

(5p) a) Calculaţi I_0 .

(5p) b)Calculaţi I_1 .

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 77

Prof. Soare Roxana

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Subiectul I (30 puncte)

(5p) 1.Să se calculeze modulul numărului complex $z=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}i\right)^{2012}$.

(5p) 2.Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi inecuaţia $3x^2+5x-2\le 0$.

(5p) 3.Să se rezolve în mulţimea $[0,2\pi)$ ecuaţia $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$

(5p) 4.Câte numere de la 1 la 200 nu sunt divizibile nici cu 3 , nici cu 5?

(5p) 5.Să se determine $a\in IR$ astfel încât vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}-(2a-1)\vec{j}$ şi $\vec{u}=(2a+1)\vec{i}+(3a+1)\vec{j}$ să fie perpendiculari.

(5p) 6.Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului de laturi 6,8,12.

Subiectul al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră mulţimea de matrice $G=A(a)=\left\{\begin{pmatrix}1+a & 2a\\ -2a & 1-4a\end{pmatrix}/\ a\in\mathbb{R}-\{\frac{1}{3}\}\right\}$

(5p) a) Să se arate că $I_2\in G$ şi $\begin{pmatrix}3 & 4\\ -4 & -7\end{pmatrix}\in G$

(5p) b) Să se arate că $(G,\cdot)$ este subgrup al grupului $(GL_2(\mathbb{R}),\cdot)$.

(5p) c) Să se rezolve în G ecuaţia $(A(a))^3=A(21a)$.

2. Se consideră polinomul $f=2X^4+4X^3+4X+4\in\mathbb{Z}_5[X]$

(5p) a) Să se arate că dacă $a\in\mathbb{Z}_5-\{\hat{0}\}$, atunci $\hat{a}^5=\hat{1}$

(5p) b) Să se determine rădăcinile din Z_5 ale polinomului f.

(5p) c) Să se descompună f în produs de factori ireductibili în Z_5 [X].

Subiectul al III-lea (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$.

(5p) a) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\ln f(x)$. .

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}((f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(n))$. .

2.Se consideră şirul $(a_n)_{n\ge 1}, a_n=\int_n^{n+!}\dfrac{1}{x(x+1)}dx$.

(5p) a) Să se studieze convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 1}$

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n$

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+...+a_n)$.

Varianta 78

Prof. Soare Roxana

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

Subiectul I (30 puncte)

(5p) 1.Într-o progresie aritmetică se cunosc $a_3=5 şi\, a_6=11$ Să se calculeze suma primilor 100 de termeni ai progresiei.

(5p) 2.Să se arate că vârfurile asociate familiei de parabole $y=x^2-(m+1)x+m+2$ se găsesc pe o parabolă.

(5p) 3.Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{3x^2-2x+8}+\sqrt{3x^2-2x+3}=5.$

(5p) 4.Câte funcţii $f:\{-2,-1,0,1,2\}\to\{1,2,3,4,5,6\}$ f au proprietatea f(-2)=f(2)?

(5p) 5.Pe latura [BC] a triunghiului ABC se consideră punctul M astfel încât $\frac{BM}{MC}=\frac{2}{5}$ Să se arate că $\overrightarrow{AM}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}.$

(5p) 6.Ştiind că $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $\sin x=\frac{5}{13}$ să se calculeze $tg\frac{x}{2}$

Subiectul al II-lea (30 puncte)

1.Se consideră sistemul :

$$\begin{cases}2x-3y+4z=1\\ x+y+2z=3\\ 3x-2y+6z=4\end{cases}$$. Se notează cu A matricea sistemului.

(5p) ab) Să se determine rangul matricei sistemului.

(5p) b) Să se rezolve sistemul.

(5p) c) Câte soluţii întregi (x_0,y_0,z_0) are sistemul cu proprietatea $|x_0+y_0+z_0|\leq 3$?

2.Pe mulţimea IR se defineşte legea de compoziţie: $x*y=2xy-6x-6y+21, \forall x,y\in\mathbb{R}$

(5p) a) Să se arate că $x*y=2(x-3)(y-3)+3, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) b) Să se arate că legea „$*$" este asociativă.

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia: $\underbrace{x*x*x*...*x}_{de\,2012\,ori}=2^{2011}+3$

.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Subiectul al III-lea (30 puncte)

1.Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$,se consideră funcţia $f_n:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$ $f_n(x)=(1+x)^n-1-nx.$

(5p) a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f_2^{'}(x)}{f_2(x)}$. .

(5p) b) Să se arate că $f_n(x)\geq 0, \forall x\in(-1,+\infty), \mathrm{n}\in\mathbb{N}, \mathrm{n}\geq 2.$.

(5p) c) Să se arate că funcţia f_n este convexă , pentru fiecare $n\in\mathbb{N}, n\geq 2, \forall x\in(-1;\infty)$

2.Se consideră funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int\limits_0^x(t^3-3t+2)e^{3t}dt.$.

(5p) a) Să se calculeze F'(x).
(5p) b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei F.
(5p) c) Să se determine punctele de inflexiune ale funcţiei F.

Varianta 79

Prof. Stan Adrian

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se arate că numărul a=$\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2}-\sqrt{\left(4\sqrt{3}-7\right)^2}$ este intreg.

(5p) 2. Determină $x\in\mathbb{R}$ astfel încât următoarele numere $x^2-6, 3x, 4x+3$ să fie termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

(5p) 3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2+(m+3)x-(m+1)$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât maximul lui f să fie egal cu 1.

(5p) 4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt[3]{x^3+3x+5}=x+2$.

(5p) 5. Să se determine valoarea parametrului real " a " pentru care vectorii $\vec{v_1}=(a-2)\vec{i}-4\vec{j}$ şi $\vec{v_2}=-3\vec{i}+(a+2)\vec{j}$ să fie coliniari.

(5p) 6. Se consideră punctele $A(-1;2)$, $B(0;1)$, $C(4;3)$. Să se calculeze distanţa de la punctul C la dreapta AB.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -10 & -4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **şi** $M=\left\{X(a)\middle|\ a\in\mathbb{R}, X(a)=I_2-a\cdot A\right\}$.

100 Variante BAC 2014 www.mateinfo.ro

(5p) a) Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b-ab)$ şi să se calculeze $X(0)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot ...\cdot X(2014)$;

(5p) b))Să se arate că o singură matrice X(a) este neinversabilă;

(5p) c) Dacă X(a) e inversabilă, să se calculeze $(X(a))^{-1}$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f(X)=(X^2+X+1)^{10}+(X^2+1)^{10}+1$ şi $g(X)=X^2+1$.

(5p) a) Să se descompună polinomul g în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$.

(5p) b) Să se arate că f este divizibil cu g ;

(5p) c) Dacă $f(X)=a_{20}X^{20}+a_{19}X^{19}+...+a_1X+a_0$, $a_i\in\mathbb{R}$, să se determine a_{19}.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2-4x+2}$;

(5p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $f'(0)$;

(5p) b) Să se studieze monotonia lui f şi să se determine punctele de extrem local ale lui f;

(5p) c) Să se arate că $\frac{1}{e}\le f(x)\le e^2$, $\forall x\in[0;1]$;

2. Fie $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3-1}{x+2}$.

(5p) a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$;

(5p) b) Să se determine volumul corpului de rotaţie determinat de graficul funcţiei $g:[0;1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{x^2+x+1}$.

(5p) c) Să se arate că $0\le\int_1^2\frac{f(x)}{x^2+x+1}dx\le\frac{1}{4}$

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 80

Prof. Stan Adrian

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Dacă $a=\sqrt{9+6\sqrt{2}}-\sqrt{9-6\sqrt{2}}$, să se calculeze $\left(a-2\sqrt{3}\right)^2$.

(5p) 2. Să se calculeze suma 3 + 10 + 17 +….+ 192 ;

(5p) 3. Știind că x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2+4x+1=0$ să se calculeze $\frac{x_1-1}{x_1+2}+\frac{x_2-1}{x_2+2}$.

(5p) 4. Să se rezolve ecuația $\lg(x-3)+2\lg(x-1)=3\lg(x-2)$.

(5p) 5. Să se calculeze $\sin(90^0+x)+\cos(180^0-x)+\sin(180^0-x)+\cos(90^0+x)$.

(5p) 6. În triunghiul ABC se cunosc AB=8, BC=5 și $\cos B=\frac{4}{5}$. Se cere să se determine sin A.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x+1 & -1 & 2 \\ 2 & x+3 & -1 \\ 2 & 1 & x+1 \end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se calculeze $A(3)\cdot A(-3)$;

(5p) b) Să se arate că $\det(A(x)+A(-x))=0$;

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia $\det(A(x))=0$.

2. Fie $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f(X)=X^3+mX^2+nX+p$, $g(X)=X^2+X-2$.

(5p) a) Să se determine $p\in\mathbb{R}$ astfel încât f(2) = 2(2m+n+9).

(5p) b) Pentru p=10, să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât f să se dividă prin g ;

(5p) c) Pentru m= - 4, n= -7, şi p = 10, să se calculeze produsul $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot.....\cdot f(2010)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. 1. Fie funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2(1+\ln x)$;

(5p) a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$;

(5p) b) Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate ale funcţiei f;

(5p) c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=1$;

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & x<1 \\ \ln(x^2-4x+4), & x\geq 1 \end{cases}$.

(5p) a) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât f(x) să admită primitive pe $\mathbb{R}$;

(5p) b) Să se arate că orice primitivă a lui f este convexă pe $(2;\infty)$.

(5p) c) Pentru $a=-4, b=6$ să se calculeze $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 81

Prof. Stan Adrian

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+3x-2$. Să se calculeze suma $S=f(1)+f(2)+.....+f(n)$.

(5p) 2. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_{18}=122$, $a_{26}=178$. Să se calculeze S_{26}.

(5p) 3. Să se rezolve ecuația $3^{x+2}+3^x+3^{x-2}=273$.

(5p) 4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

$\begin{cases} x+y=3 \\ x^2-xy+y^2=39 \end{cases}$.

(5p) 5. În plan se consideră punctele A(1;5), B(-2;-4), C(4;-6). Să se determine ecuația dreptei care trece prin mijlocul laturii $[BC]$ și este paralelă cu dreapta AB.

(5p) 6. În triunghiul ABC se cunosc AB=8, BC = 12, AC =10. Se cere să se determine raza cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{Z})$ și $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{Z})$.

(5p) a) Să se calculeze determinantul matricei $A+I_3$;

(5p) b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea $A+mI_3$ să fie inversabilă;

(5p) c) Să se rezolve ecuația matriceală $X\cdot(A+I_3)=I_3$.

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f(X) = X^2 + (a+\hat{3})X + \hat{a} + \hat{2}$ şi $g(X) = X + \hat{1}$

(5p) a) Determinaţi $a \in \mathbb{Z}_5$, ştiind că $f(\hat{1}) = \hat{2}$;

(5p) b) Pentru $a = \hat{3}$ rezolvaţi ecuaţia $f(x) = \hat{2}$;

(5p) c) Pentru $a = \hat{1}$ să se arate că polinomul f este divizibil cu polinomul g.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2 - x}{e^x}$.

(5p) a) Să se calculeze $f'(0)$;

(5p) b) Să se determine ecuaţia asimptotei către ∞ la graficul funcţiei;

(5p) c) Să se arate că f(x) este convexă pe $(-\infty;1] \cup [4;\infty)$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 1, & x < 1 \\ x^3 - 1, & x \geq 1 \end{cases}$;

(5p) a) Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$;

(5p) b) Să se calculeze $\int_0^2 f(x)dx$;

(5p) c) Să se calculeze volumul corpului de rotaţie determinat de graficul funcţiei

$g : [1:2] \to \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2 + x + 1}$ în jurul axei OX între dreptele de ecuaţii x=1 şi x=2;

Varianta 82

Prof. Stoica Alina Codruţa

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Sa se rezolve in $\mathbb{R}$ ecuatia $2^{x^2+5} = 4^{x+2}$.

(5p) 2. Să se găsească o relaţie independentă de m între rădăcinile ecuaţiei $x^2 - (m+1)x + 2m = 0$.

(5p) 3. Rezolvaţi ecuaţia $\sqrt{x^2 - 3} - x = -1$.

(5p) 4. Care este probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $A = \left\{ x \in \mathbb{N} / \dfrac{15}{2x-1} \in \mathbb{N} \right\}$ acesta să fie divizibil cu 3.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(2,−1), N(-1,1) şi P(1,3). Găsiţi ecuaţia dreptei care trece prin P şi este paralelă cu mediatoarea lui MN.

(5p) 6. Ştiind că $x\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$ calculaţi $\sin x$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-2z=-2 \\ x+4y+mz=8 \end{cases}, m\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se calculeze determinantul matricei sistemului;

(5p) b) Să se rezolve sistemul în cazul în care m=5;

(5p) c) Să se arate că pentru $\forall m\in\mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie internă $x\circ y=2xy-6x-6y+21$, $x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se verifice că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

(5p) b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x\circ x=11$

(5p) c) Ştiind că legea "$\circ$" este asociativă , calculaţi $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2014}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{x}$

(5p) a) Găsiţi asimptotele la graficul funcţiei f ;

(5p) b) Găsiţi punctele de extrem local ale graficului funcţiei f ;

(5p) c) Să se arate că $e^{\pi}>\pi^{e}$

2. Fie $I_n=\int x^n\sin x\,dx$, $x\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se calculeze I_1 ;

(5p) b) Să se determine o relaţie de recurenţă pentru I_n ;

(5p) c) Să se demonstreze că dacă $x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

Varianta 83

Prof. Stoica Alina Codruţa

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze $\log_2 5-\log_2 3+\log_2 \frac{12}{5}$.

(5p) 2. Câţi termeni iraţionali conţine dezvoltarea $\left(1+\sqrt{2}\right)^8$?

(5p) 3. Aflaţi numărul complex z care are proprietatea $z+2\bar{z}=6+i$.

(5p) 4. Care este probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre , acesta să conţină cifra 6 ?

(5p) 5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că distanţa de la $A(4-m;4+m)$ la $B(-1;2)$ este egală cu 5.

(5p) 6. Aflaţi perimetrul triunghiului ABC ştiind că $AB=4$, $AC=6$ şi $m(\measuredangle BAC)=60^0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie mulţimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}2014^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(5p) a) Verificaţi dacă $I_3\in G$.

(5p) b) Arătaţi că $A(x)A(y)\in G$ oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) c) Rezolvaţi ecuaţia $\det A^2(x)=2014$ în $\mathbb{R}$.

2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie internă $x\circ y=xy-3x-3y+12$, $x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Arătaţi că $x\circ y\in(3;+\infty),\forall x,y\in(3;+\infty)$

(5p) b) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ ştiind că $x\circ x=x$

(5p) c) Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to(3;+\infty), f(x)=e^x+3$ este un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R};+)$ la grupul $((3;+\infty);\circ)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ şi $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{f(x)}{x}$

(5p) a) Să se studieze continuitatea funcţiei f

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) b) Să se studieze derivabilitatea funcţiei f în $x=0$.

(5p) c) Să se calculeze limita şirului $a_n = g\left(\frac{1}{n^3}\right)+g\left(\frac{2}{n^3}\right)+...+g\left(\frac{n}{n^3}\right), n\geq 1$

2. Fie funcţia $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x - x$

(5p) a) Arătaţi că orice primitivă F a lui f este concavă pe $(1;+\infty)$

(5p) b) Să se calculeze $\int\left(x-f(x)+\ln x\right)^2 dx$

(5p) c) Să se determine primitiva G a funcţiei $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{f(x)}{x}$ cu proprietatea că $G(1)=\frac{1}{2}$

Varianta 84

Prof. Stoica Alina Codruţa

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze $z^4+\frac{1}{z^4}$ ştiind că $z\in\mathbb{C}$ şi $z^2+z+1=0$

(5p) 2. Ştiind că graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+ax-2a$ intersectează axa OX în două puncte situate la distanţa 3, să se afle valorile parametrului $a\in\mathbb{R}$.

(5p) 3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\lg(x+1)+\lg x=\lg 9+1$.

(5p) 4. Să se determine $\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{2014}}\right\}$ unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

(5p) 5. Calculaţi $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$ ştiind că $ABCDEF$ este un hexagon cu lungimea laturii de 10.

(5p) 6. Arătaţi că unghiul vectorilor $a=5\vec{i}-4\vec{j}$ şi $b=2\vec{i}+3\vec{j}$ este obtuz.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră permutările $e,\sigma\in S_3, e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$

(5p) a) Să se calculeze σ^3 ;

(5p) b) Să se rezolve ecuaţia $\sigma^{2014}\cdot x=e, x\in S_3$

(5p) c) Demonstraţi că, indiferent de ordinea factorilor, produsul permutărilor din S_3 este permutare impară.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+m\in\mathbb{Z}_3[X]$ şi $m\in\mathbb{Z}_3$

(5p) a) Să se calculeze $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(2)$

(5p) b) Pentru $m=2$ să se determine rădăcinile polinomului f

(5p) c) Să se determine $m\in\mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul f este ireductibil peste $\mathbb{Z}_3[X]$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+x^2$

(5p) a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

(5p) b) Să se arate că f este convexă pe $\mathbb{R}$

(5p) c) Să se arate că funcţia f nu are asimptote spre $+\infty$

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}, I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$

(5p) a) Să se calculeze I_1 ;

(5p) b) Să se arate că $I_n\leq\dfrac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$;

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

Varianta 85

Prof. Szép Gyuszi

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze partea reală a numărului complex $\dfrac{2+3i}{1+i}$.

(5p) 2. Să se determine valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+3x+1$.

(5p) 3. Să se determine partea întreagă a numărului $\log_3 534$.

(5p) 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a-b=2$.

(5p) 5. Să se determine a, $b\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(-1,2)$ și $B(0,3)$ să aparțină dreptei de ecuație

$y=ax+b$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) 6. Să se calculeze $\cos^2(2013\pi)+\sin(2014\pi)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră permutările $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\in S_4$ şi $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\in S_4$.

(5p) a) Să se verifice că permutarea σ este pară.

(5p) b) Să se determine numărul elementelor mulțimii $A=\{\tau^n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$.

(5p) c) Să se determine $x\in S_4$ pentru care $x\sigma=\tau$.

2. Fie mulțimea $H=\left\{\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{Q}, a^2-3b^2=1\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

(5p) a) Să se verifice că $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\in H$.

(5p) b) Să se demonstreze că H este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

(5p) c) Să se arate că $(H,\cdot)$ este grup abelian.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}$.

(5p) a) Să se calculeze $f'(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

(5p) b) Stabiliți intervalele de monotonie ale funcției f.

(5p) c) Să se determine mulțimea valorilor funcției f.

2. Se consideră funcția bijectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{-x^3+3x^2-10x+27}{x^2+9}$.

(5p) a) Să se verifice că $f(x)=-x+3-\dfrac{x}{x^2+9}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

(5p) b) Să se calculeze $\int_1^9 \left(x-3+f(x)\right)^2 dx$.

(5p) c) Să se calculeze $\int_{\frac{19}{10}}^{3} f^{-1}(x)\,dx$.

Varianta 86

Prof. Szép Gyuszi

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $(2x-3)^2=-9$.

(5p) 2. Arătați că vârful parabolei $y=x^2-2(3m+1)x+m$ se află sub axa Ox pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

(5p) 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\sqrt{x+3}=1$.

(5p) 4. Să se determine termenul care conține pe x^3 în dezvoltarea $\left(x+\frac{2}{x}\right)^7$, unde $x>0$.

(5p) 5. Fie hexagonul regulat $ABCDEFG$. Să se descompună vectorul $\overrightarrow{AD}$ după vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AF}$.

(5p) 6. Știind că $a\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ și $\sin a=\frac{3}{5}$, să se calculeze $\operatorname{tg} a$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $m\in\mathbb{R}$ și punctele $A(m,2)$, $B(m-1,3)$ și $C(2m,2-m)$. Considerăm matricea

$$M=\begin{pmatrix} m & 2 & 1\\ m-1 & 3 & 1\\ 2+m & 2-m & 1\end{pmatrix}.$$

(5p) a) Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care matricea M este inversabilă.

(5p) b) Arătați că punctele A, B și C sunt coliniare.

(5p) c) Să se arate că $\operatorname{rang}(M)\geq 2$, pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

2. Fie $\mathbb{Z}_{15}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,14\}$ inelul claselor de resturi modulo 15.

(5p) a) Să se arate că suma elementelor inelului este egală cu $\hat{0}$.

(5p) b) Rezolvați în $\mathbb{Z}_{15}$ ecuația $\hat{2}\cdot x=\hat{6}$.

(5p) c) Să se determine numărul elementelor neinversabile ale inelului.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-7x^2+11x-5}$.

(5p) a) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)}{x-1}$.

(5p) b) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

(5p) c) Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

2. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 2}$ dat prin termenul general $I_n=\int_1^2 \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

(5p) a) Să se calculeze I_2.

(5p) b) Să se demonstreze că $I_{n+1}=\mathrm{e}-\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{n-1}}+(1-\mathrm{n})\,\mathrm{I}_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

(5p) c) Folosind, eventual, inegalitatea $0\leq\frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\leq\frac{\mathrm{e}}{x^n}$, $(\forall)\,\mathrm{x}\in[1,2]$, $(\forall)\,\mathrm{n}\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Varianta 87

Prof. Szép Gyuszi

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică în care $b_2=\sqrt{27}$ și $b_4=\sqrt{243}$. Calculați b_{10}.

(5p) 2. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(\mathrm{x})=2^{x^2-4x+3}$ nu este injectivă.

(5p) 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x-3^{x+1}+2\cdot 3^{x+2}=32$.

(5p) 4. Să se determine numărul de funcții $f:\{1,2,3\}\to\{4,5\}$ pentru care $f(1)\leq f(2)$.

(5p) 5. În sistemul cartezian de axe xOy se consider punctele $A(2,3)$, $B(-1,4)$ și $C(1,-2)$. Să se scrie

ecuația dreptei care trece prin punctul C și este paralelă cu $\overrightarrow{AB}$.

(5p) 6. Să se rezolve în intervalul $[0,3\pi]$ ecuația $tg(\mathrm{x}+\pi)=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+\mathrm{y}+\mathrm{z}=0 \\ \mathrm{ax}+\mathrm{y}+\mathrm{z}=a-1 \\ \mathrm{x}+\mathrm{y}+b\,\mathrm{z}=-1 \end{cases}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ și notăm cu A matricea corespunzătoare sistemului.

(5p) a) Să se arate că $\det(A)=(1-\mathrm{a})(\mathrm{b}-1)$.

(5p) b) Să se rezolve sistemul de ecuații pentru $a=0$ și $b=2$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) c) Arătați că, dacă $b=1$, atunci sistemul de ecuații este incompatibil.

2. Se consideră polinomul $f=8X^4+2X^3-13X^2+7X-1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, $x_4\in\mathbb{C}$.

(5p) a) Să se arate că polinomul f se divide cu X^2+X-1.

(5p) b) Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$.

(5p) c) Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $a_1=\frac{1}{2}$ și $a_{n+1}=\frac{a_n^3+a_n}{2}$, $(\forall)\,n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Să se arate că $a_n\in(0,1)$, $(\forall)\,n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) b) Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

(5p) c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n}$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}(x+1)e^x, & x\le 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$.

(5p) a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

(5p) b) Să se determine o primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f.

(5p) c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g:\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ în jurul axei Ox.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 88

Prof. Szép Gyuszi

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătați că numărul complex $2-i\sqrt{3}$ este o soluție a ecuației $z^2-4z+7=0$.

(5p) 2. Calculați suma dintre valoarea maximă și valoarea minimă a funcției $f:[3;9]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-3|+|x-5|$.

(5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2+x+4}=8-x$.

(5p) 4. Notăm cu S mulțimea tuturor funcțiilor $f:\{1;3;5;7\}\to\{8;9;10\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând o funcție din mulțimea S, aceasta să fie surjectivă.

(5p) 5. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care distanța dintre punctele $A(2m+1,2)$ și $B(2,2m)$ să fie egală cu 5.

(5p) 6. Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB=AC=8$ și $BC=10$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră mulțimea $M=\left\{A(m)=\begin{pmatrix}1 & m & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3^m\end{pmatrix}\middle|\, m\in\mathbb{R}\right\}$.

(5p) a) Să se verifice că $I_3\in M$.

(5p) b) Să se arate că $A(m)\cdot A(n)=A(m+n)$, pentru orice m, $n\in\mathbb{R}$.

(5p) c) Să se calculeze $A(1)+A(2)+\cdots+A(2014)$.

2. Fie inelul comutativ $(\mathbb{Z},\star,\circ)$ în care legile de compoziție sunt definite astfel:

$x\star y=x+y-2$ și $x\circ y=xy-2x-2y+6$, pentru orice x, $y\in\mathbb{Z}$.

(5p) a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.

(5p) b) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^2\star(x-1)=0$.

(5p) c) Să se determine a, $b\in\mathbb{Z}$ pentru care între inelele $(\mathbb{Z},\star,\circ)$ și $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ să existe un izomorfism de forma $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=ax+b$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}+x+2$.

(5p) a) Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(5p) b) Arătați că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(5p) c) Arătați că punctul $A\left(0;\dfrac{5}{2}\right)$ este centru de simetrie al graficului funcției f.

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{6}e^{-\frac{x}{3}}$.

(5p) a) Arătați că funcția $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ este strict crescătoare pe $[0,+\infty)$.

(5p) b) Arătați că $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(3-xe^{-\frac{x}{3}}-3e^{-\frac{x}{3}}\right)$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

(5p) c) Demonstrați că ecuația $F(x)=k$ are soluție unică în intervalul $[0,+\infty)$, pentru orice $k\in\left[0,\dfrac{3}{2}\right)$.

Varianta 89

Prof. Szép Gyuszi

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătați că $\sqrt{2}\in\left(\dfrac{1}{2},\sqrt[3]{3}\right)$.

(5p) 2. Calculați distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+7x+10$ cu axa Ox.

(5p) 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(4^x-6\right)=x$.

(5p) 4. Calculați probabilitatea ca, alegând o pereche $(a,b)\in\{1;3;6;8\}\times\{1;3;6;8\}$, produsul $a\cdot b$ să fie par.

(5p) 5. Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+(3a+1)\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}+(3-a)\vec{j}$ să fie coliniari.

(5p) 6. Calculați $\cos\left(2\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

100 Variante BAC 2014 www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

2. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+ \quad y+2z=-1 \\ x-2y+ \quad z=n \\ mx- \quad y- \quad z=1 \end{cases}$, unde m, $n\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care determinantul matricei sistemului este nul.

(5p) b) Să se determine valorile parametrilor m, $n\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

(5p) c) Să se arate că, dacă sistemul admite soluția (x_0, y_0, z_0) cu proprietatea că x_0, y_0 și z_0 sunt în progresie aritmetică (în această ordine), atunci $n=0$.

2. Fie f, $g\in\mathbb{Z}_5[X]$, $f=X^3+X^2+aX+\hat{1}$ și $g=X+\hat{3}$.

(5p) a) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_5$ pentru care polinomul g divide polinomul f.

(5p) b) Pentru $a=\hat{1}$, să se arate că $f=\left(X+\hat{1}\right)\left(X^2+\hat{1}\right)$.

(5p) c) Pentru $a=\hat{1}$, să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ ecuația $f(x)=\hat{0}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-xe^2$.

(5p) a) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

(5p) b) Să se determine punctul în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație

$y=1$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(\dfrac{f'(x)}{(x-2)e^2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

2. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ definim șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ cu termenii generali $x_n=\int_0^1 t^n\cos t\,dt$ și $y_n=\int_0^1 t^n\sin t\,dt$.

(5p) a) Arătați că $x_n\geq 0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) b) Folosind metoda integrării prin părți, demonstrați că $x_{n+1}=-(n+1)y_n+\sin 1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) c) Admițând că $y_{n+1}=(n+1)x_n-\cos 1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, calculați $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 90

Prof. Szép Gyuszi

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătați că $\log_3\left(\sqrt{10}-1\right)+\log_3\left(\sqrt{10}+1\right)=2$.

(5p) 2. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2-2x+m=0$ verifică relația $x_1^2+x_2^2=10$.

(5p) 3. Notăm cu g inversa funcției bijective $f:(0,+\infty)\to(6,+\infty)$, $f(x)=5^x+1$. Calculați $g(26)$.

(5p) 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile mulțimii $A=\{1;2;3;4;5\}$, aceasta să aibă două elemente.

(5p) 5. Fie $MNPQ$ un paralelogram în care $MQ=8$, $MN=3$ și $m(\sphericalangle MQP)=150^\circ$. Calculați $\left|\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MN}\right|$.

(5p) 6. Calculați $\sin\frac{\pi}{36}-\cos\frac{17\pi}{36}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

(5p) a) Să se calculeze rangul matricei A.

(5p) b) Să se demonstreze că $\det\left(A\cdot {}^tA\right)$ este pătrat perfect.

(5p) c) Să se calculeze $\det\left({}^tA\cdot A\right)$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3+X^2+2X+2$ și $g=X^2+1$. Notăm cu x_1, x_2, $x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile polinomului f.

(5p) a) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

(5p) b) Să se calculeze $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)$.

(5p) c) Să se calculeze $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x+3}{3x+2}$.

(5p) a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$.

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-\frac{x}{3x+2}\right)^x$.

(5p) c) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(5^x\right)$.

2. Fie m, $n\in\mathbb{R}$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2^x+m, & x\le 0\\ 2nx+\sin x, & x>0\end{cases}$.

(5p) a) Să se determine m, $n\in\mathbb{R}$ pentru care funcția f este o primitivă a unei funcții pe $\mathbb{R}$.

(5p) b) Pentru $m=-1$ și $n=1$, calculați $\int_{-1}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$.

(5p) c) Să se determine $n\in\mathbb{R}$ pentru care aria suprafeței delimitate de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$g(x)=f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=\frac{\pi}{3}$ și $x=\pi$ este egală cu 5.

Varianta 91

Prof. Teler Marian

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi: $\log_2\frac{1}{8}+\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}$.

(5p) 2. Determinaţi $a,b\in R$, ştiind că parabolele asociate funcţiilor $f,g:R\to R$, $f(x)=x^2-2x+a$, $g(x)=-2x^2+bx+1$ au acelaşi vârf.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_9(x+1)+\log_3(x+1)=\frac{3}{2}$.

(5p) 4. Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $\{7,8,9,....,70\}$, acesta să fie pătrat perfect sau cub perfect.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) 5. Se dau punctele $A(1,-2), B(3,0)$. Să se determine coordonatele punctului M, ştiind că B este mijlocul segmentului (AM).

(5p) 6. Calculaţi aria triunghiului ABC, ştiind că $AB=10, AC=24, BC=26$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ şi $X(\mathrm{p})=I_3+pA$, $p\in R$

(5p) a) Să se calculeze A^2-2A,

(5p) b) Demonstraţi că $X(\mathrm{p})X(\mathrm{q})=X(\mathrm{p}+q+2pq), \forall p,q\in R$,

(5p) c) Calculaţi: i) $X(2)X\left(-\frac{2}{5}\right)$

ii) Determinaţi inversa matricei $X(2)$

2. În $R[X]$ se consideră polinomul $f=X^3+3X^2+aX-1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in C$.

(5p) a) Determinaţi $a\in R$ ştiind că polinomul f se divide prin $X-1$.

(5p) b) Pentru $a=-3$, calculaţi $\frac{x_1+1}{x_1}+\frac{x_2+1}{x_2}+\frac{x_3+1}{x_3}$.

(5p) c) Pentru $a=0$, verificaţi dacă $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=3$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R-\{1\}\to R, f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-1}$

(5p) a) Să se determine asimptota către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

(5p) b) Verificaţi dacă $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{x}=4$

(5p) c) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(0,f(0))$.

2. Pentru fiecare $n\in N^*$ se consideră funcţia $f_n:[0,1]\to R$, $f_n(x)=\frac{x^n}{x+1}$ şi fie $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

(5p) a) Calculaţi I_1 şi I_2

(5p) b) Verificaţi dacă $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}$, $\forall n\in N^*$ şi determinaţi apoi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

100 variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 92

Prof. Teler Marian

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Aflaţi câte numere naturale nenule mai mici sau egale cu 100 se divid cu 2 sau cu 5.

(5p) 2. Determinaţi $a \in R$ astfel încât numărul $\frac{5}{2+i}+\frac{a}{2-i}$ să fie întreg.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x-5\cdot 2^x+6=0$.

(5p) 4. Rezolvaţi ecuaţia: $A_x^2+C_x^{x-2}=18$.

(5p) 5. Să se determine $m \in R$ astfel încât punctele $A(1,-2), B(3,m), C(2,6)$ să fie coliniare.

(5p) 6. Fie $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ astfel încât $\sin\alpha=\frac{1}{3}$. Să se calculeze $\sin 2\alpha$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră polinomul $f=X^3-6X^2+mX-6, m \in R$ şi fie $x_1, x_2, x_3 \in C$ rădăcinile sale.

(5p) a) Calculaţi $f\left(x_1+x_2+x_3\right)-f\left(x_1x_2x_3\right)$.

(5p) b) Să se determine m astfel încât $x_1+x_3=2x_2$

(5p) c) Pentru $m=11$, să se calculeze $C_{x_1+x_2}^{x_3}+C_{x_2+x_3}^{x_1}+C_{x_3+x_1}^{x_2}$

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=I_3+A$, $C=I_3-A$.

(5p) a) Calculaţi A^2,

(5p) b) Verificaţi dacă $BC=CB$,

(5p) c) Demontraţi că matricea B este inversabilă şi determinaţi inversa sa.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R\to R, f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Se notează cu $f^{(n)}$ derivata de ordinul n a funcţiei f.

(5p) a) Demonstraţi că funcţia f are un punct de minim.

(5p) b) Demonstraţi că graficul funcţiei f nu are puncte de inflexiune.

(5p) c) Demonstraţi că funcţiile $g_n:R\to R, g_n(x)=f^{(n)}(x)+f^{(n+1)}(x)-e^x, n \in N$ sunt constante.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

2. Se consideră funcția $f:(-2,\infty)\to R, f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$.

(5p) a) Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe $(-2,\infty)$

(5p) b) Calculaţi $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{x+1}dx$

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_x^{3x} f(t)dt}{x}$

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 93

Prof. Teler Marian

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinaţi produsul primelor 5 zecimale ale numărului real $\sqrt{50}$

(5p) 2. Rezolvaţi ecuaţia: $2^3=4^{2x-1}$

(5p) 3. Calculaţi modulul numărului complex: $z=\left(\sqrt{2}-i\right)^6$

(5p) 4. Rezolvaţi în R ecuaţia: $\log_2(2-x)-\log_2(2+x)=-1$

(5p) 5. Să se calculeze lungimea înălţimii din A a triunghiului ABC, $A(1,2), B(-1,3), C(0,4)$

(5p) 6. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris într-un triunghi dreptunghic care are catetele de lungimi 5 şi 12.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}2x+y+3z=0\\3x+2y+5z=0\\x+3y+mz=0\end{cases}$, unde $m\in R$

(5p) a) Calculaţi determinantul matricei sistemului.

(5p) b) Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluţie unică.

(5p) c) În cazul $m=4$, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului, cu toate componentele numere

întregi,care verifică relaţia: $x_0^2+y_0^2+z_0^2\le 3$.

2. Pe R se dau legile de compoziţie $x\perp y=x+y-3$, $x\circ y=xy-3x-3y+12$.

(5p) a) Rezolvaţi sistemul: $\begin{cases} x \perp y = 7 \\ x \circ y = 7 \end{cases}$

(5p) b) Calculaţi $(e_1 \perp e_2) \circ e_1$, unde e_1 şi e_2 sunt elementele neutre ale operaţiilor „ $\perp$ “, respectiv „ $\circ$ “.

(5p) c) Determinaţi $x, y \in Z$ astfel încât: $x \circ x \circ y = 11$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se dau funcţiile $f, g : R \to R$, $f(x) = x^2(a-x) + 2014$, $g(x) = x^3(x-a) + 2014$

(5p) a) Să se determine $a \in R$ astfel încât tangentele la graficele celor două funcţii în punctul $A(a, f(a))$ să fie perpendiculare.

(5p) b) Să se demonstreze că graficul funcţiei f are puncte de inflexiune pentru orice $a \in R$

(5p) c) Să se determine $a \in R$ astfel încât graficul funcţiei g să nu admită puncte de inflexiune.

2. Se dă funcţia $f : (0, \infty) \to R$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x}$

(5p) a) Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f are un punct de inflexiune.

(5p) b) Calculaţi $\int f(x)dx$ şi $\int f\left(\dfrac{1}{x}\right)dx$

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\int_1^x f(t)dt}{x^2}$

Varianta 94

Prof. Tomiță Liliana

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve ecuația $2 \cdot [x]^2 - 3 \cdot [x] + 1 = 0$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x .

(5p) 2. Determinați forma trigonometrică a numărului complex $z = 1 - i\sqrt{3}$.

(5p) 3. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{a}\right)^{100}$. Să se determine termenul care conține pe x^5 .

(5p) 4. Știind că $\text{tg}a = \dfrac{1}{3}$ și $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ să se calculeze $\cos a$.

(5p) 5. Arătați că vectorii $\vec{u} = 6 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j}$ și $\vec{v} = 2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}$ formează un unghi obtuz.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) 6. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3;5)$, $B(-1;4)$ și $C(2;-2)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin A și este paralelă cu BC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se dau permutările $\alpha, \beta \in S_5$; $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(5p) a) Arătați că $\alpha\beta \neq \beta\alpha$.

(5p) b) Rezolvați ecuația $x\alpha = \beta; x \in S_5$.

(5p) c) Determinați permutările $x \in S_5$ care verifică relația $x^2 = \beta^2$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX - 1$, unde a este un număr real.

(5p) a) Pentru $a = 1$, calculați $f(-1)$.

(5p) b) Pentru $a = 1$, determinați rădăcinile complexe ale polinomului f.

(5p) c) Determinați numărul real a știind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 10$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile complexe ale polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 90x^2 + mx + n, \ m, n \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Pentru $m = n = 1$, calculați $f'(x), x \in \mathbb{R}$.

(5p) b) Determinați soluțiile ecuației $f''(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

(5p) c) Arătați că punctele de inflexiune la graficul funcției sunt coliniare.

2. Fie șirul $(\mathcal{I}_n)_{n \geq 1}$, definit prin $\mathcal{I}_n = \int_0^1 (1+x)^n \, 2^x dx$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) a) Calculați $\mathcal{I}_1$.

(5p) b) Studiați monotonia șirului $(\mathcal{I}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(5p) c) Arătați că $\mathcal{I}_n \cdot \ln 2 = 2^{n+1} - 1 - n\mathcal{I}_{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 95

Prof. Tomiță Liliana

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se scrie al 50-lea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1=3$ și $r=-3$.

(5p) 2. Să se scrie termenul al optulea al dezvoltării $(2x-y)^{20}$.

(5p) 3. Să se scrie în ordine crescătoare numerele $\sqrt[3]{4};\ \sqrt[4]{6};\ \sqrt[12]{280}$.

(5p) 4. Calculați $\sin 105^o$.

(5p) 5. Se dau vectorii $\vec{a}=m\vec{i}+\vec{j}$ și $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$. Să se determine parametrul real m pentru care unghiul format de cei doi vectori este de 45°.

(5p) 6. Să se determine aria triunghiului ABC, știind că $a=3,\ b=5,\ c=6$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} mx+y+z=4 \\ x+2my+z=4 \\ x+y+mz=4 \end{cases}$, unde m este parametru real.

(5p) a) Arătați că $\det A \vdots_2, (\forall) m\in\mathbb{Z}$, unde A este matricea coeficienților sistemului.

(5p) b) Rezolvați sistemul pentru $m=1$.

(5p) c) Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

2. Se consideră mulțimea $G=(-2,\infty)$ și legea de compoziție "$*$" definită prin $x*y=xy+2x+2y+2$.

(5p) a) Arătați că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu cu "$*$".

(5p) b) Arătați că $(G,*)$ este grup abelian.

(5p) c) Demonstrați că grupurile $(G,*)$ și $(\mathbb{R},+)$ sunt izomorfe.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

(5p) a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $x_0=1$.

(5p) b) Să se determine asimptotele la graficul funcției .

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) c) Să se aplice teorema lui Lagrange pe intervalul $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$ funcției $g:(0,1)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{\ln x}$.

2. Se consideră șirul $(\mathcal{I}_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general $\mathcal{I}_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x+4}dx$

(5p) a) Arătați că $4\mathcal{I}_n+\mathcal{I}_{n+1}=\frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n\in N^*$.

(5p) b) Calculați $\mathcal{I}_2$.

(5p) c) Demonstrați că șirul $(\mathcal{I}_n)_{n\geq 1}$ este convergent și apoi calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{I}_n$.

Varianta 96

Prof. Tomiță Liliana

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculați $\log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3}$.

(5p) 2. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $z^4-81=0$.

(5p) 3. Determinați punctele în care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$ intersectează axele.

(5p) 4. Determinați aria unui triunghi echilateral cu latura de 3 cm.

(5p) 5. Dintre funcțiile surjective $f:\{1,2,3,...,10\}\to\{1,2,3,...,10\}$ se alege una la întâmplare. Care este probabilitatea ca funcția aleasă să fie injectivă?

(5p) 6. Se consideră punctele $A(2,3)$; $B(-1,1)$ și $C(0;-2)$. Să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 6 & 4 & 2\\ 9 & 6 & 3\end{pmatrix}$

(5p) a) Calculați $\det A$ și $\operatorname{rang} A$.

(5p) b) Determinați A^{2014}.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) c) Fie $B=\mathcal{I}_3+A$. Arătați că B este inversabilă și determinați B^{-1} .

2. Se consideră polinomul $f=X^4+4X^3-4aX+4b\in\mathbb{Q}[x]$

(5p) a) Pentru $a=b=0$ determinați rădăcinile lui f .

(5p) b) Știind că f admite o rădăcină dublă de forma $m+n\sqrt{3},\ m,n\in\mathbb{Q}^*$ determinați a și b.

(5p) c) Determinați a și b știind că $x=1$ este rădăcină dublă pentru f .

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{2x-x^2}$

(5p) a) Să se studieze derivabilitatea funcției f .

(5p) b) Să se afle punctele de extrem ale funcției f .

(5p) c) Arătați că f este o funcție concavă pe $[0,2]$.

2. Fie $x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$ și $\mathcal{I}_n=\int\sin^n x\,dx$

(5p) a) Calculați $\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\mathcal{I}_3$.

(5p) b) Arătați că $n\mathcal{I}_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\mathcal{I}_{n-2},\ n\geq 2$.

(5p) c) Calculați $24\mathcal{I}_6$.

Varianta 97

Prof: Viorica Lungana

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinați mulțimea de adevăr a următorului predicat: $p(x)$: „$x\in\mathbb{Z},\ \dfrac{2x+3}{x-1}\in\mathbb{Z}$“.

(5p) 2. Termenul al n-lea al unei progresii aritmetice este $a_n=\dfrac{3n-1}{6},n\geq 1$. Să se calculeze suma primilor patru termeni.

(5p) 3. Determinați $m\in\mathbb{R}$, pentru care funcția $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-2(m-2)x+m\right)$ este definită pe mulțimea numerelor reale.

(5p) 4. Într-o sală de conferințe sunt 12 fotolii la masa prezidiului. În câte moduri se pot așeza pe aceste fotolii 7 membrii ai prezidiului.

(5p) 5. Determinați ecuația înălțimii din A, a unui triunghi ABC, unde A(2,5), B(1,3), C(7,0).

(5p) 6. Calculați $\cos a+\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-a\right)+\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+a\right)$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

(5p) a) Arătați că $A\cdot B=B\cdot A=O_2$.

(5p) b) Arătați că $(A+B)^n=A^n+B^n$.

(5p) c) Calculați $\det\left(A^{2012}+B^{2012}\right)$.

2. Pe mulțimea $M=(1,\infty)$ se definește legea „*" $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}\in M$.

(5p) a) Arătați că legea este asociativă pe M.

(5p) b) Calculați elementul neutru al acestei legi și determinați elementele inversabile din mulțimea M.

(5p) c) Rezolvați ecuația $\underbrace{x*x*x*\ldots*x}_{de\ \ 2012\ \ ori}=\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f,g,h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

(5p) a) Calculați $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x\cdot e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

(5p) b) Dacă $g(x)=e^{x+1}$, calculați $h(x)=(g\circ f)(x)$.

(5p) c) Determinați punctul $c\in(1,2)$ pentru care teorema lui Lagrange este adevărată pe intervalul $[1,2]$ pentru funcția h.

2. Fie funcția $f:[-4,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{16-x^2}$.

(5p) a) Să se calculeze $\int_0^4 f^2(x)dx$.

(5p) b) Să se calculeze $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\dfrac{x}{f(x)}dx$.

(5p) c) Să se demonstreze că $0\le\int_{-4}^{4}f(x)dx\le 32$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta 98

Prof: Viorica Lungana

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\left|\frac{2x^3-3x^2+4x+9}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right.\right\}$.

(5p) 2. Rezolvați sistemul: $\begin{cases}|x-1|+|y-5|=6\\ y=5+|x-1|\end{cases}$.

(5p) 3. Fie binomul $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$. Determinați *n,* astfel încât raportul dintre coeficientul termenului al cincilea și coeficientul termenului al treilea este $\frac{7}{2}$.

(5p) 4. Cercetați dacă funcția $f:(1,\infty)\to(-2,\infty)$, $f(x)=x^3-3x$ este bijectivă.

(5p) 5. Fie *ABC* un triunghi cu $A(3,2)$, $B(5,4)$. Dacă punctul $G(3,4)$ este centrul de greutate al triunghiului *ABC*, să se determine coordonatele vârfului *C*.

(5p) 6. Arătați că valoarea expresiei $E=2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\cos^4 x+\sin^4 x)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricei $A_x=\begin{pmatrix}-x & -1 & x & 1\\ 1 & x & 1 & -x\\ x & 1 & x & 1\\ 1 & -x & -1 & x\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

(5p) a) Calculați determinantul asociat matricei A_x.

(5p) b) Determinați valorile lui *x* pentru care $rangA_x=3$.

(5p) c) Calculați suma modulelor valorilor lui *x* pentru care rangul matricei A_x este 3.

2. Fie G mulțimea matricelor de forma $M(a)=\begin{pmatrix}2-a & a-1\\ 2(1-a) & 2a-1\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}^*$.

(5p) a) Să se exprime $M(a)$ sub forma $M(a)=A+aB$, unde *A* și *B* sunt matrice care un depind de parametrul *a*.

(5p) b) Să se arate că *G* este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

(5p) c) Arătați că grupul $(G,\cdot)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2+rx-p}{x-1}, & x<0\\ \ln\left(qx^2-3x+1\right), & x\geq 0\end{cases}$.

(5p) a) Studiați continuitatea funcției funcției f în punctul $x=0$.

(5p) b) În cazul când funcția este continuă în punctul $x=0$, studiați derivabilitatea funcției în acest punct.

(5p) c) Calculați $S=p^2+q^2+r^2$ pentru care este valabilă teorema lui Rolle pe intervalul $[-1,1]$.

2. Fie șirul $I_n=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\arcsin x)^n\,dx$.

(5p) a) Calculați I_0 și I_1.

(5p) b) Găsiți o formulă de recurență pentru șirul $(I_n)_{n\geq 0}$.

(5p) c) Studiați convergența șirului $(I_n)_{n\geq 0}$.

Varianta 99

Prof: Viorica Lungana

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinați mulțimea $M=\{m\in\mathbb{Z}\ /\ x^2-mx+6=0$ are cel puțin o rădăcină întreagă$\}$.

(5p) 2. Fie $x,y,z\in\mathbb{R}$ cu $x+y+z=1$. Demonstrați că $x^2+y^2+z^2\geq 4(xy+yz+zx)-1$. În ce caz are loc egalitatea?

(5p) 3. Rezolvați ecuația $3^x+4^x=8-x, x\in\mathbb{R}$.

(5p) 4. Pentru a forma o echipă de baschet (5 jucători) un antrenor are la dispoziție 8 jucători albi și 15 jucători de culoare. În câte moduri poate alcătui antrenorul echipa?

(5p) 5. Se dă vectorul $\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$. Care este mulțimea punctelor *M* din plan care verifică relația $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OM}=3$?

(5p) 6. Fie α și β numere reale astfel încât $\sin\alpha+\sin\beta=1$ și $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$. Calculați $\cos(\alpha-\beta)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}2x-y+z-t=1\\ x+y+mz+t=-1\\ x-y+z+nt=p\end{cases}, m,n,p\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Determinați *m, n* reali astfel încât matricea sistemului să aibă rangul 2.

(5p) b) În cazul în care rangul matricei sistemului este doi, determinați *p* pentru care sistemul este

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

compatibil.

(5p) c) Dacă rangul matricei sistemului este doi și sistemul este compatibil, determinați soluțiile sistemului.

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + aX^2 + bX + c$,

$g = X^3 + (a+p)X^2 + (b+p)X + c + p$, unde $p \neq 0$.

(5p) a) Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^3 - 1 = 0$.

(5p) b) Arătați că polinoamele au cel puțin o rădăcină comună.

(5p) c) Ce relație există între a, b, c, pentru ca cele două polinoame să aibă o rădăcină comună.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 + nx - p}{x-1}, & x < 0 \\ \ln(rx^2 - 3x + 1), & x \geq 0 \end{cases}$.

(5p) a) Să se determine n și p astfel încât funcția f să fie continuă și derivabilă în $x = 0$.

(5p) b) Să se verifice pe intervalul $[-1,1]$ condițiile teoremei lui Rolle.

(5p) c) Să se scrie ecuația tangentei în origine la graficul funcției determinate.

2. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \inf(t^2 - 2t), & t \leq 3 \\ \sup(8 - 3t), & t > 3 \end{cases}$.

(5p) a) Să se arate că $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 1 \\ -1, & x \in (1,3] \\ 8 - 3x, & x > 3 \end{cases}$.

(5p) b) Să se calculeze $\int_0^4 f(x)dx$.

(5p) c) Pe intervalul $[0,4]$ construiți graficul funcției și calculați: aria suprafeței plane limitată de graficul funcției și axa Ox și volumul corpului de rotație generat de graficul funcției în jurul axei Ox.

Varianta 100

Prof: Viorica Lungana

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât între rădăcinile ecuației $x^2 - 2(a-1)x - 2a + 1 = 0$ să existe relația $\dfrac{x_1}{x_2^2} + \dfrac{x_2}{x_1^2} \geq \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

(5p) 2. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 2; g(x) = x^2 + 2x$. Ecuația $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ are soluții reale?

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) 3. Se consideră mulțimea $A=\{1,2,...,10\}$. În câte submulțimi ale mulțimii A se află elementul 1 ?

(5p) 4. Să se rezolve ecuația: $\log_7\left(4\cdot 2^x-2^{x-1}\right)=1+\log_7 4$.

(5p) 5. Să se arate că expresia $E(x)=\sin^2 x+2\cos x\cos a\cos(a+x)-\cos^2(a+x)$ nu depinde de x.

(5p) 6. Știind că imaginea punctului $P(2,3)$ prin simetrie de centru $P_0(x_0,y_0)$ este punctul $P'(4,-5)$, determinați coordonatele centrului P_0.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & -1 & a\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ cu $a\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$, pentru care matricea A este inversabilă.

(5p) b) Pentru $a=1$, să se calculeze matricea $B=\frac{1}{\det A}\left(A^2-3A-5I_3\right)$.

(5p) c) Calculați A^{-1}, pentru $a=1$.

2. Pe mulțimea $G=(1,\infty)-\{2\}$ se definește legea de compoziție „*" astfel

$$x*y=1+(x-1)^{\ln(y-1)},(\forall)x,y\in G.$$

(5p) a) Studiați comutativitatea acestei legi de compoziție.

(5p) b) Studiați asociativitățiii legii „*".

(5p) c) Rezolvați ecuația $x*x*x=e^{27}+1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie șirul dat de termenul general $x_n=\frac{8n-3}{8n+1}$. Formăm șirul $a_n=x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n$.

(5p) a) Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict monoton.

(5p) b) Să se arate că $a_n<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}},(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) c) Calculați limita șirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

2. Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x^3+3x^2+8x+6}{\left(x^2+2x+4\right)^n}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Descompuneți în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}$ expresia x^3+3x^2+8x+6.

(5p) b) Calculați I_1 și I_2.

(5p) c) Calculați $I_n=\int f_n(x)dx$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

ALTE VARIANTE PROPUSE

*****

Varianta propusă 1

Prof: Badea Daniela

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Aflaţi partea întreagă a numărului $a=\sum_{k=1}^{2012}\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$.

(5p) 2. Determinaţi valorile parametrului real *m* pentru care
$(m-1)x^2+(m-1)x-m+2\geq 0,(x)\in\mathbb{R}$.

(5p) 3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2$..

(5p) 4. Determinaţi $n\in\mathbb{N}$ dacă în dezvoltarea $(1+x)^n$ coeficienţii lui x^4 şi x^{13} sunt egali.

(5p) 5. Fie familia de drepte $d_m:(2m-1)x+(m+1)y+5-m=0,\ m\in\mathbb{R}$. Demonstraţi că dreptele trec printr-un punct fix şi determinaţi coordonatele acestuia.

(5p) 6. Calculaţi $\sin\left(\arccos\frac{12}{13}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A=B+I_3$.

(5p) a) Arătaţi că $A^2=3A$;

(5p) b) Calculaţi $A^n, n\in\mathbb{N}^*$;

(5p) c) calculaţi $A+A^2+A^3+....+A^{2012}$.

2. Se consideră mulţimea $G=\left\{A_x=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\mid x\in\mathbb{Z}\right\}$.

(5p) a) Arătaţi că *G* este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor;

(5p) b) Demonstraţi că $(G,\cdot)$ este grup abelian;

(5p) c) Arătaţi că $(G,\cdot)\simeq(\mathbb{Z},+)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie familia de funcţii de gradul al treilea $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_m(x)=x^3+mx^2+x-1;\ m\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Aflaţi punctele de extrem local ale funcţiei f_2;

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) b) Arătaţi că f_1 este inversabilă şi calculaţi $\left(f_1^{-1}\right)'(2)$;

(5p) c) Determinaţi valorile parametrului real m astfel încât ecuaţia $f_m(x)=2x-2$ are trei soluţii reale.

2. Fie funcţiile

$$f_n:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\operatorname{tg}^n x;\ n\in\mathbb{N}^*\ \text{şi şirul}\ (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+f_n(x)\right)dx.$$

(5p) a) Calculaţi $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f_2(x)dx$;

(5p) b) Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent;

(5p) c) Arătaţi că $\max\left\{I_n \mid n\in\mathbb{N}^*\right\}=\frac{\pi\ln 2}{8}$.

Varianta propusă 2

Prof: Badea Daniela

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Aflaţi suma primilor 40 de termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ştiind că $a_6+a_{12}+a_{22}+a_{42}=40$.

(5p) 2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2-3x+1$. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f([x])=0$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x.

(5p) 3. Determinaţi funcţia de gradul al doilea care are valoarea maximă $\frac{3}{4}$ şi al cărei grafic conţine punctul $A(0,-1)$ şi are ca axă de simetrie dreapta $d:2x-1=0$.

(5p) 4. Fie binomul $\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^n, n\in\mathbb{N}^*$ şi $x>0$. Aflaţi n ştiind că suma tuturor coeficienţilor dezvoltării este cu 992 mai mare decât suma coeficienţilor binomiali.

(5p) 5. Fie punctele A, B, C de afixe $z_1=3+i,\ z_2=1-3i,\ z_3=i$. Demonstraţi că triunghiul ABC este obtuzunghic.

(5p) 6. Calculaţi $E=\frac{3+\sin x+5\cos x}{2+3\sin x-\cos x}$ ştiind că $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricele $A_x=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\x&0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(5p) a) Arătaţi că matricea A_1 este inversabilă şi calculaţi inversa ei;

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) b) Calculaţi $A_x^{\,n}; n \in \mathbb{N}^*$;

(5p) c) Determinaţi valorile lui x pentru care matricele $B_n = A_x^{\,n} + A_x^{\,n+1} + A_x^{\,n+2}, n \in \mathbb{N}^*$ sunt inversabile;

2. Fie polinoamele $f = \left(X^2 - X - 1\right)^{2012} + X^2 + X + 1$ şi $g = X^2 - 3X + 2$.

(5p) a) Aflaţi restul împărţirii lui f la g;

(5p) b) Aflaţi restul împărţirii lui $f(3)$ la 13;

(5p) c) Calculaţi $s = \sum_{k=3}^{n} g\left(k\right)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f\left(x\right) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$.

(5p) a) Aflaţi ecuaţia asimptotei spre $-\infty$;

(5p) b) Studiaţi derivabilitatea funcţiei f;

(5p) c) Stabiliţi natura punctelor $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f\left(x\right) = e^x\left(x^2 - 2\right)$.

(5p) a) Arătaţi că aria domeniului cuprins între graficul funcţiei f, axa absciselor şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$ are valoarea e;

(5p) b) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathrm{F}\left(x\right) = \int_0^x f\left(t\right)dt$;

(5p) c) Calculaţi $L = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\int_0^{\sin x} f\left(t\right)dt}{\sin x}$.

Varianta propusă 3

Prof: Badea Daniela

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică în care $a_1 = 1$ şi $r = 4$. Calculaţi suma $S = \sum_{k=1}^{2012} \dfrac{1}{a_k \cdot a_{k+1}}$.

(5p) 2. Aflaţi valorile parametrului real m astfel încât soluţiile ecuaţiei $x^2 - 3x + 2\left(|m| - 1\right) = 0$ să verifice relaţia $x_1^2 + x_2^2 = 5$.

(5p) 3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $x + \log_2\left(9 - 2^x\right) > 9^{\log_3 \sqrt{3}}$.

(5p) 4. Câte numere naturale de trei cifre se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5? Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare un astfel de număr, acesta să aibă toate cifrele pare?

(5p) 5. Fie punctele $\mathrm{A}\left(3,1\right), \mathrm{B}\left(1,-3\right)$. Aflaţi coordonatele unui punct C situat pe axa Oy astfel încât aria triunghiului ABC este 3.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) 6. Fie $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Demonstraţi că $\sin\alpha+\sin\beta\le\sqrt{4-\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)^2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}\alpha x+\beta y+2z=1\\ \alpha x+\left(2\beta-1\right)y+3z=1\\ \alpha x+\beta y+\left(\beta+3\right)z=2\beta-1\end{cases}$; $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

(5p) a) Determinaţi valorile parametrilor complecşi α,β astfel încât sistemul este compatibil determinat;

(5p) b) Stabiliţi natura sistemului pentru $\beta=-1$

(5p) c) Dacă $\beta=1$ aflaţi soluţia sistemului $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ astfel încât $x_0^{\,2}+y_0=\left(z_0-1\right)^{2012}$.

2. Fie mulţimea de matrice $\mathrm{G}=\left\{A=\begin{pmatrix}\hat{1}&a&b\\ \hat{0}&\hat{1}&c\\ \hat{0}&\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}/\,a,b,c\in\mathbb{Z}_3\right\}$.

(5p) a) Rezolvaţi ecuaţia matriceală $\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{1}&2\\ \hat{0}&\hat{1}&\hat{1}\\ \hat{0}&\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{0}\\ \hat{1}\\ 2\end{pmatrix}$; $x,y,z\in\mathbb{Z}_3$;

(5p) b) Arătaţi că $\left(\mathrm{G},\cdot\right)$ are o structură de grup abelian;

(5p) c) Aflaţi cardinalul mulţimii G.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n\left(x\right)=x^2\left(1+x\right)^n$; $n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Aflaţi $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f_n\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=12$;

(5p) b) Calculaţi $\sum f_2\left(x_k\right)$ unde x_k sunt punctele de extrem local ale funcţiei f_2 ;

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\mathrm{C}_n^0+3\mathrm{C}_n^1+4\mathrm{C}_n^2+.....+\left(n+1\right)\mathrm{C}_n^{n-1}+\left(n+2\right)\mathrm{C}_n^n}{n\cdot2^n}$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f\left(x\right)=\sqrt{x^2+2x+1}$.

(5p) a) Arătaţi că $\int\limits_0^{\sqrt{3}-1}\dfrac{1}{f^2\left(x\right)}dx=\dfrac{\pi}{12}$;

(5p) b) Calculaţi $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$;

(5p) c) Aflaţi limita şirului $a_n=\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+2kn+2n^2}$.

Varianta propusă 4

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Prof: Badea Ion

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătaţi că numărul $z=(1+i)^{2012}+(1-i)^{2012}$ este real.

(5p) 2.Demonstraţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in\mathbb{Q}\\ \sqrt{2}x-1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ nu este injectivă.

(5p) 3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x-1}+x=7$.

(5p) 4. În dezvoltarea $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$ cu $a>0$, suma coeficienţilor binomiali ai termenilorde rang par este 128. Aflaţi termenul care conţine pe a^2.

(5p) 5. Determinaţi parametrul real *m* astfel încât punctul de intersecţie al dreptelor $d_1:2x-y+5=0,\ d_2:mx-y-2=0$ să fie situat pe bisectoarea a doua a unghiurilor formate de axele de coordonate.

(5p) 6. Calculaţi $\sin 2\alpha$ ştiind că $3\sin\alpha+2\cos\alpha+3=0;\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie sistemul $\begin{cases}x+ay+2z=1\\ 2x+2y+z=-1\\ x+y-z=b\end{cases}$ unde $a,b\in\mathbb{C}$.

(5p) a) Determinaţi $a\in\mathbb{C}$ astfel încât matricea sistemului are rangul 2.

(5p) b) Aflaţi valorile parametrilor complecşi *a* şi *b* astfel încât sistemul este compatibil simplu nedeterminat

(5p) c) Pentru a=1, b=-2 aflaţi soluţia sistemului (α,β,γ) astfel încât α,β,γ să fie în progresie aritmetică.

2. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă

$x*y=-2xy+3x+3y-3,(\forall)x,y\in\mathbb{Z}$.

(5p) a) Determinaţi elementul neutru *e* al legii de compoziţie;

(5p) b) Determinaţi $\mathrm{U}(\mathbb{Z})$, mulţimea elementelor simetrizabile în raport cu legea „$*$”;

(5p) c) Calculaţi $\underbrace{x*x*x*.....*x}_{de\ 2012\ ori}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţiile $f_n:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f_n(x)=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

(5p) a) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei *f* în punctul de abscisă $x_0=0$;

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) b) Aflaţi imaginea funcţiei f_3;

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{3^{k-1}}$.

2. Fie şirul de integrale $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $I_0=\int_0^1\frac{dx}{x^2+2x+a^2+2a+2}$,

$$I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{x^2+2x+a^2+2a+2}\qquad (\forall)n\geq 1,\ \text{unde } a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

(5p) a) Calculaţi I_0;

(5p) b) Demonstraţi că $I_{n+1}\leq I_n\ \ (\forall)n\in\mathbb{N}^*$;

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot I_n$.

Varianta propusă 5

Prof: Badea Ion

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătaţi că dacă $z+\frac{1}{z}=2\sin\frac{\pi}{12}$ atunci $z^{2012}+\frac{1}{z^{2012}}=1$.

(5p) 2. Demonstraţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=\begin{cases}x+2,\ x\in\mathbb{Q}\\ \sqrt{3}x-1,\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ nu este surjectivă.

(5p) 3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x-5\cdot 6^x=0$.

(5p) 4. Câte numere naturale nenule diferite se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4 , dacă în fiecare astfel de număr, orice cifră intră cel mult o dată?

(5p) 5. Fie punctele $A(3,1)$ şi $B(1,-3)$. Aflaţi coordonatele unui punct C ştiind că triunghiul ABC are aria 3, iar centrul de greutate al triunghiului se află pe axa O*x*.

(5p) 6. Demonstraţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=2\cos x\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)-3$ este periodică şi aflaţi perioada principală.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $\mathrm{M}=\left\{A=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}/\,a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0\right\}$.

(5p) a) Demonstraţi că $(\forall)A,B\in\mathrm{M}\Rightarrow A\cdot B\in\mathrm{M}$;

(5p) b) Arătaţi că orice matrice $A\in\mathrm{M}$ este inversabilă în M;

(5p) c) Pentru $a=3,b=2,c=1$ calculaţi $A^n,n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul

$f=X^4+aX^2+aX+1\in\mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3,x_4 şi

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

$$\Delta=\begin{vmatrix}1+x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & x_4\\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & x_4\\ x_1 & x_2 & x_3 & 1+x_4\end{vmatrix}.$$

(5p) a) Pentru $a=0$ descompuneţi polinomul f în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$;

(5p) b) Calculaţi Δ;

(5p) c) Arătaţi că dacă $a>0$ atunci f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$.

(5p) a) Stabiliţi monotonia funcţiei f;

(5p) b) Determinaţi punctul $M(\alpha,\beta),\alpha\in\mathbb{N}^*$ situat pe graficul funcţiei f în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuaţie $3x-16y=0$;

(5p) c) Calculaţi $f^{(n)}(x), n\in\mathbb{N}^*$, derivata de ordin n a funcţiei f.

2. Se consideră şirul de integrale $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, I_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x^n)\,dx$.

(5p) a) Calculaţi I_2;

(5p) b) Demonstraţi că $0\le I_n\le\dfrac{1}{2n+1}(\forall)n\in\mathbb{N}^*$;

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Varianta propusă 6

Prof: Badea Ion

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie ecuaţia $z^2+2mz+m=0,\ m\in\mathbb{R}$. Dacă z_1,z_2 sunt soluţiile complexe ale ecuaţiei date, determinaţi valorile parametrului real m pentru care $|z_1|+|z_2|=1$.

(5p) 2. Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x-6$ şi $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}, g(x)=x^2-x-6$. Aflaţi valorile minime ale celor două funcţii.

(5p) 3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $\log_2(x^2-3)>\log_2(x+3)$.

(5p) 4. Aflaţi numărul funcţiilor $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4,5\}$ care nu sunt injective.

(5p) 5. Fie dreptele de ecuaţii $d_1:y=x+1$; $d_2:y=2x$ şi punctul $A(0,-1)$. Aflaţi coordonatele punctelor $B\in d_1$ şi $C\in d_2$ astfel încât dreptele d_1 şi d_2 să fie mediane în triunghiul ABC.

(5p) 6. Calculaţi $S=\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right)+\arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)+\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\right)+\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}\right)$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $G_n=\{X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\mid X^n=A\}, n\in\mathbb{N}, n\geq 2.$

(5p) a) Demonstraţi că $X\cdot A=A\cdot X,\ (\forall)X\in G_n$;

(5p) b) Aflaţi cardinalul mulţimii $G_n, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$;

(5p) c) Demonstraţi că
$(\forall)n,m\in\mathbb{N},\ n,m\geq 2$ şi $(\forall)X\in G_n, Y\in G_m\ (\exists)p\in\mathbb{N}, p\geq 2$ astfel încât $XY\in G_p$.

2. Se consideră polinomul $f=X^{2012}-X^{1003}+X+1\in\mathbb{R}[X]$.

(5p) a) Aflaţi restul împărţirii lui f la $g=(X-1)^2$;

(5p) b) Calculaţi $\sum_{k=1}^{2012}\frac{1}{x_k}$ unde $x_k,\ k\in\{1,2,....,2012\}$ sunt rădăcinile polinomului f;

(5p) c) Arătaţi că polinomul $h=f-X$ este divizibil cu X^2-X+1.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f continuă pe $[0,\infty)$,derivabilă pe $(0,\infty)$, $f(0)=1$ şi $g(x)=e^{-x^2}$.

(5p) a) Stabiliţi intervalele de convexitate ale funcţiei g;

(5p) b) Calculaţi $\lim_{x\to\infty}g^{(n)}(x)$, unde $g^{(n)}(x), n\in\mathbb{N}$ este derivata de ordin n a funcţiei g;

(5p) c) Ştiind că $|f(x)|\leq g(x)\ (\forall)x\geq 0$ arătaţi că există $c\in(0,\infty)$ astfel încât $f'(c)=-2c\cdot e^{-c^2}$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{x^2}$.

(5p) a) Calculaţi aria domeniului plan cuprins între graficul funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=x\cdot f(x)$, axa absciselor şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$;

(5p) b) Aflaţi valoarea limitei $L=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\int_0^{\cos x}f(t)dt}{\int_0^{\operatorname{ctg}x}f(t)dt}$

(5p) c) Dacă $h:[-1,0]\to\mathbb{R},\ h(x)=e^{x^2}+e^{1-x^2}$ arătaţi că $2\sqrt{e}\leq\int_{-1}^{0}h(x)dx\leq 1+e$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta propusă 7

Prof. Isofache Cătălina Anca,C.N.Al.I.Cuza Ploieşti

- .Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi a,b$\in R$ astfel încât să se verifice egalitatea de numere complexe $\left(\frac{2}{1-i}\right)^{10}$ =a+bi.

(5p) 2. Determinaţi cel mai mic număr real m, astfel încât funcţia f: $R \to R$, f(x)=x^2 +6x+12 să fie strict crescătoare pe intervalul [m; ∞).

(5p) 3. Arătaţi că $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+....\frac{1}{5^{12}}<\frac{5}{4}$.

(5p) 4. Se consideră dezvoltarea $\left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^9$,$x\neq 0$.Calculaţi rangul termenului dezvoltării binomului care îl conţine pe x^4.

(5p) 5. Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii A=$\left\{\cos\frac{n\pi}{6}/\,n\in Z\right\}$.

(5p) 6. Dacă A(2;3),B(4 ;7) şi C(- 6 ;7) sunt coordonatele vârfurilor triunghiului ABC,calculaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele A=$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ şi I_3=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases}x+y+z+t=1\\ y+z+t=0\\ z+t=0\end{cases}\quad ;(x,y,z,t)\in C\,xCxCxC.$$

(5p) a) Calculaţi rangul matricei sistemului.
(5p) b) Rezolvaţi sistemul de ecuaţii.
(5p) c) Arătaţi că ecuaţia AX=I_3 , unde X$\in M_{4;3}(C)$ are o infinitate de soluţii ,iar ecuaţia YA= I_4 ,unde Y$\in M_{4;3}(C)$ nu are soluţie.

2. Se consideră polinoamele f=x^6+x^3+1 cu rădăcinile $x_1;x_2;...x_6$ si g=x^2+x+1 cu rădăcinile $y_1;y_2$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) a) Calculaţi câtul si restul imparţirii lui f la g.

(5p) b) Calculaţi sumele $S_1 = f(y_1)+f(y_2)$ şi $S_2 = g(x_1)+g(x_2)+...+g(x_6)$.

(5p) c) Determinaţi numărul de rădăcini reale ale polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to R$, $f(x)=2\sqrt{x}$ şi şirurile $(a_n)_{n\in N^*}$ şi $(b_n)_{n\in N^*}$,

$a_n = \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$, $b_n = a_n - f(n), \forall n\in N^*$.

(5p) a) Demonstraţi că funcţia f ' este strict descrescătoare pe $(0;\infty)$.

(5p) b) Utilizând teorema lui Lagrange,arătaţi că, pentru orice k>0 există $c\in(k;k+1)$ astfel încât f(k+1)-f(k)=$\frac{1}{\sqrt{c}}$.

(5p) c) Demonstraţi că şirul $(b_n)_{n\in N^*}$ este convergent şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. Se consideră funcţiile $f;g:(0;\infty)\to R$,definite prin f(x)=sinx şi g(x)=$\frac{1}{x}$.

(5p) a) Calculaţi $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)dx$

(5p) b) Calculaţi $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2011}x\,dx$ şi $\int_{-\pi}^{\pi}g^{(2012)}(x)dx$, unde $g^{(n)}(x), n\in N$,reprezintă derivata de ordin n a funcţiei g.

(5p) c) Arătaţi că $t^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 x\,dx - 2t\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{x^2}dx\geq 0, \forall t\in R$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

Varianta propusă 8

Prof. Isofache Cătălina Anca,C.N.Al.I.Cuza Ploieşti

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi modulul numărului complex $(2+i)^{10}$.

(5p) 2. Determinaţi produsul primelor zece zecimale ale numărului $\sqrt{50}$.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $4^{x^2}=2^{6x}$.

(5p) 4. Calculaţi numărul funcţiilor surjective $f:\{a;b;c\}\to\{1;2\}$ care au proprietatea f(a)=2.

(5p) 5. Determinaţi $\cos A$, dacă $\cos B=\frac{1}{3}$ şi $\cos C=\frac{1}{2}$,iar A,B,C sunt unghiurile unui triunghi ABC.

(5p) 6. Dacă A(1;2),B(3;1) şi C(2;3), calculaţi coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi mulţimea

$G(A)=\{X\in M_3(C)/\,AX=XA\}$.

(5p) a) Calculaţi A^3 şi A^{-1}.

(5p) b) Dacă $X,Y\in G(A)$,atunci $X\cdot Y\in G(A)$.

(5p) c) Rezolvaţi ecuaţia $X^2=I_3$ în mulţimea G(A).

2. Pe mulţimea numerelor complexe se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+ix+iy-1-i$.

(5p) a) Arătaţi că $x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ z$; $\forall x,y,z\in C$.

(5p) b) Calculaţi $(-100i)\circ(-99i)\circ....\circ(-i)\circ 0\circ i\circ(2i)\circ...\circ(99i)\circ(100i)$.

(5p) c) Rezolvaţi în mulţimea C ecuaţia $x\circ x\circ x\circ x=1-i$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R\to R$,f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).

(5p) a) Determinaţi numărul de soluţii reale ale ecuaţiei f(x)=0 şi ale ecuaţiei f '(x)=0.

(5p) b) Calculaţi numărul punctelor de extrem local ale funcţiei f.

(5p) c) Determinaţi valoarea minimă a funcţiei f pe R.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

2. Se consideră funcţiile $f_n : R \to R$,definite prin $f_0(x) = e^x$ şi $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$, $\forall n \in N$ şi $\forall x \in R$.

(5p) a) Calculaţi $f_1(x)$ şi $f_2(x)$, $x \in R$.

(5p)b)Utilizând metoda inducţiei matematice,arătaţi că: $f_{n+1}(x) = e^x - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - ... - \frac{x^n}{n!} - 1, \forall n \in N$ * şi $\forall x \in R$.

(5p) c) Arătaţi că $0 \le f_n(x) \le e^x \cdot \frac{x^n}{n!}, \forall n \in N$ şi calculaţi $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$, $\forall x > 0$.

Varianta propusă 9

Prof. Isofache Cătălina Anca,C.N.Al.I.Cuza Ploieşti

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Rezolvaţi in mulţimea numerelor reale ecuaţia $[x] = \frac{x+1}{3}$,unde [x] reprezintă partea întreagă a lui x.

(5p) 2. Determinaţi valoarea maximă a funcţiei f: $R \to R$, f(x)= - x^2 +6x.

(5p) 3. Se consideră funcţia $f : Z \to Z$,f(x)=2x-1.Calculaţi suma S=f(1)+f(3)+...+f(2013).

(5p) 4. Calculaţi partea reală a numărului complex $\frac{1}{3+2i}$.

(5p) 5. Determinaţi numărul de soluţii ale ecuaţiei $\cos 2x - 3\sin x + 4 = 0$,ştiind că $x \in [0;\pi]$.

(5p) 6. Calculaţi $a \in R$ ştiind că vectorii $\vec{v_1} = (2+a)\vec{i} + a\vec{j}$ şi $\vec{v_2} = 2\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ sunt coliniari.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ şi I_3=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $M_3(N)$.

(5p) a) Verificaţi dacă $A \in M_3(N)$ şi dacă $I_3 \in M_3(N)$.

(5p) b) Găsiţi o matrice $X \in M_3(N)$,astfel încât rangX=1 şi o matrice $Y \in M_3(N)$ cu proprietatea că rangY=2.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

(5p) c) Arătaţi că dacă matricea $X \in M_3(N)$ şi $X^{-1} \in M_3(N)$,suma elementelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană este egală cu 1.

2. Se consideră polinomul $f = X^n - 1 \in R[X], n \in N^*$ şi $x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}; k = \overline{0; n-1}.$

(5p) a) Calculaţi $f(x_k)$.

(5p) b) Demonstraţi că $\prod_{k=1}^{n-1}(x - x_k) = x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1$

(5p) c) Arătaţi că $\prod_{k=1}^{n}(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}) = i^{n-1}$ şi că $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}...\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0;\infty) \to R$,f(x)=lnx şi şirurile $(a_n)_{n\in N^*}$ şi $(b_n)_{n\in N^*}$, $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$, $b_n = a_n - f(n), \forall n \in N^*$.

(5p) a) Demonstraţi că funcţia f ' este strict descrescătoare pe $(0;\infty)$.

(5p) b) Utilizând teorema lui Lagrange arătaţi că,pentru orice k>0 există $c \in (k; k+1)$ astfel încât f(k+1)-f(k)=$\frac{1}{c}$.

(5p) c) Demostraţi că şirul $(b_n)_{n\in N^*}$ este convergent şi calculaţi $\lim_{n\to\infty} a_n$.

2. Se consideră funcţia f :[a;b]$\to$[a;b], $f(x) = \frac{x^2 + ab}{a+b}$,unde 0<a<b.

(5p) a) Calculaţi aria delimitată de reprezentarea grafică a funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=a şi x=b.

(5p) b) Arătaţi că $\int_a^b f^{-1}(x)dx \geq \frac{b^2 - a^2}{2}$.

(5p) c) Arătaţi că,dacă $a,b \in Q$,atunci $\int_a^b f^{-1}(x)dx \in Q$.

100 Variante BAC 2014 - www.mateinfo.ro

SOLUȚII

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Alexandru Elena-Marcela

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1-i)^{16}=[(1-i)^2]^8=(-2i)^8=2^8(i^2)^4$	3p
	$(1-i)^{16}=2^8\in\mathbb{R}$.	2p
2.	$y_{\min}=-\dfrac{\Delta}{4a}$	1p
	$\Delta=b^2-4ac$, $\Delta=56$	2p
	$y_{\min}=-\dfrac{56}{8}=-7$.	2p
3.	C.E $x\geq 0$ şi $9-x\geq 0\Rightarrow x\in[0,9]$	1p
	$(\sqrt{x}+\sqrt{9-x})^2=3^2\Rightarrow 2\sqrt{x(x-9)}=0$	2p
	$\Rightarrow x(9-x)=0\Rightarrow x=0$ sau $x=9$.	2p
4.	Numerele naturale pătrate perfecte din două cifre: 16, 25, 36, 49, 64, 81 $\Rightarrow$ 6 cazuri favorabile	2p
	Numărul numerelor naturale de două cifre este 90 $\Rightarrow$ 90 cazuri posibile	3p
	$\mathrm{P}=\dfrac{nr.\,cazuri\ favorabile}{nr.\,cazuri\ posibile}=\dfrac{6}{90}=\dfrac{1}{15}$.	
5.	$x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}$, $y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}$	2p
	$x_G=0$, $y_G=3\Rightarrow G(0,3)$.	3p
6.	$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin A}=2\cdot 4$	2p
		1p
	$\Rightarrow\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow m(\angle A)=60^0$	2p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$AM = \begin{pmatrix} 3y & 3x \\ x & 3y \end{pmatrix}$	2p
	$MA = \begin{pmatrix} 3y & 3x \\ x & 3y \end{pmatrix}$	2p
	$AM = MA, \quad \forall\, A \in C(M)$.	1p
b)	$B \in C(M)$ și $B^2 = O_2$	
	$B \in M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow B^2 - (Tr\,B)B + (\det B)I_2 = O_2$, $Tr\,B = 2x$, $\det B = x^2 - 3y^2 \Rightarrow 2xB = (x^2 - 3y^2)I_2$	3p
	Dacă $x \neq 0 \Rightarrow B = \dfrac{x^2 - 3y^2}{2x} I_2 \Rightarrow y = 0$ și $x = 1 \Rightarrow B = I_2$. Dar $(I_2)^2 = I_2 \neq O_2$ nu convine.	
	Dacă $x = 0 \Rightarrow Tr\,B = 0 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 3x \\ x & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 3x^2 \end{pmatrix} = O_2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow B = O_2$.	2p
c)	$C \in C(M), C \neq O_2$. Presupunem că $\det C = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3y^2 = 0$	1p
	Dacă $x = 0 \Rightarrow y = 0$	2p
	Dacă $x \neq 0 \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \pm\sqrt{3} \in Q$, *fals. Deci* $\det C \neq 0$.	2p
2. a)	$f(-2) = (-2)^3 - (-2) + a \Rightarrow a = -6$	1p
	$x^3 - x - 6 = (x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$	3p
	$\Rightarrow x_2 = -1 + i\sqrt{2}; x_3 = -1 - i\sqrt{2}$.	1p
b)	$f(x_1) = x_1^3 - x_1 - 6 = 0$	3p
	$f(x_2) = x_2^3 - x_2 - 6 = 0$	
	$f(x_3) = x_3^3 - x_3 - 6 = 0$	
	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - (x_1 + x_2 + x_3) - 18 = 0$	2p
	$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 18$.	

www.mateinfo.ro

c)	$f'(x)=3x^2-1\Rightarrow x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcini întregi $\Rightarrow f(x)$ nu admite rădăcini multiple $\Rightarrow x_1\in(-\infty, x_2), x_2\in(x_2, x_1), x_3\in(x_1,+\infty)$. $\Rightarrow x_2=0\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow a=0\Rightarrow x^3-x=0$ $x(x^2-1)=0\Rightarrow x(x-1)(x+1)=0\Rightarrow x_1=-1, x_2=0, x_3=1$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$e-e^{\frac{1}{x}}>0, x\neq 0$ $\frac{1}{x}<1\Leftrightarrow\frac{1-x}{x}<0\Leftrightarrow x<0$ sau $x>1$ $\Rightarrow D=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.	2p 2p 1p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\ln(e-e^{\frac{1}{x}})=\ln(e-1)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e-e^{\frac{1}{x}})=\ln(e-1)$ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ln(e-1)$ $y=\ln(e-1)$ ecuația asimptotei orizontale.	1p 1p 1p 2p
c)	f derivabilă pe D fiind o compunere de funcții derivabile $f'(x)=\frac{1}{e-e^{\frac{1}{x}}}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}, (\forall)x\in D$ $e-e^{\frac{1}{x}}>0$ pe domeniul D $\Rightarrow f'(x)>0$. $\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe D.	1p 1p 1p 2p
2. a)	$I_2=\int_0^1 x^2e^x dx=x^2e^x\|_0^1-2\int_0^1 xe^x dx$	2p

www.mateinfo.ro

	$= e - 2xe^x \mid_0^1 + 2\int_0^1 e^x dx = e - 2e + 2e^x \mid_0^1$	2p
	$= e - 2e + 2e - 2 = e - 2$.	1p
b)	$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx$	1p
	$= x^{n+1} e^x \mid_0^1 - \int_0^1 (n+1) x^n e^x dx$	1p
	$= e - (n+1)\int_0^1 x^n e^x dx$	1p
	$= e - (n+1) I_n$.	2p
c)	Avem $0 \le I_n = \int_0^1 x^n e^x dx \le \int_0^1 x^n e dx$	2p
	$\int_0^1 x^n e dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} e \mid_0^1 = \frac{e}{n+1}$	1p
	Deci $0 \le I_n \le \frac{e}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_n = 0$, folosind teorema cleștelui.	2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Alexandru Elena-Marcela

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\lvert z\rvert=\frac{\lvert 9-2i\rvert}{\lvert 7+6i\rvert}=\frac{\sqrt{9^2+2^2}}{\sqrt{7^2+6^2}}=\frac{\sqrt{81+4}}{\sqrt{49+36}}$ $\lvert z\rvert=\frac{\sqrt{85}}{\sqrt{85}}=1$	3p 2p
2.	$y_{\max}=-\frac{\Delta}{4a}$ $\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=28$ $y_{\max}=-\frac{28}{4\cdot(-1)}=7$.	1p 2p 2p
3.	C.E $x>0, 5-2x>0\Rightarrow x\in\left(0,\frac{5}{2}\right)$ $\log_2 x(5-2x)=1\Rightarrow x(5-2x)=2\Rightarrow 2x^2-5x+2=0$ $x_1=2, x_2=\frac{1}{2}, x\in\left\{2,\frac{1}{2}\right\}\subset\left(0,\frac{5}{2}\right)$	1p 2p 2p
4.	Numerele a căror produs este 12 sunt: 26,62,34,43 $\Rightarrow$ 4 cazuri favorabile Numărul numerelor naturale de două cifre este 90 $\Rightarrow$ 90 cazuri posibile P = $\frac{nr.\,cazuri\ favorabile}{nr.\,cazuri\ posibile}=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$.	2p 3p
5.	Dacă M este mijlocul lui $[AC]$ atunci M(-1,2).	2p

www.mateinfo.ro

	Ecuația medianei din B este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ sau $-2y+4=0$.	3p
6.	$\sin C = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ $\frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{16}{\frac{4}{5}} = 2R \Rightarrow R = 10.$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2+6-2-3-2-4$ $= -7$	2p 2p 1p
b)	$E(A) = A^2 - A + I_3$, $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 11 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $E(A) = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 11 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E(A) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -1 & 7 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$	3p 2p
c)	$\det A = -7 \neq 0 \Rightarrow (\exists)\ A^{-1}$ $A^* = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{-5}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{-5}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{6}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$	1p 2p 2p

www.mateinfo.ro

2. a)	Conform teoremei lui Bezout e necesar ca $f(1)=0$, adică $f(1)=1^3-2m\cdot 1+m+1=-m+2=0,$ de unde rezultă m=2.	1p 3p 1p
b)	$m=2\Rightarrow f(x)=x^3-4x+3$ Relațiile lui Viete: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-4\\x_1x_2x_3=-3\end{cases}$ și $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=1-(x_1+x_2+x_3)+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3-x_1x_2x_3=$ $=1-0+(-4)-(-3)=1-4+3=0$	3p 2p
c)	E necesar ca $f(-1)=1$ $f(-1)=-1+2m+m+1=3m=1$ de unde rezultă $m=\frac{1}{3}$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f^4(x)=(\sqrt{x^2+1})^4=(x^2+1)^2=x^4+2x^2+1,\ f^2(x)=(\sqrt{x^2+1})^2=x^2+1$ $f^4(x)-2f^2(x)-15=0\Rightarrow x^4+2x^2+1-2(x^2+1)-15=0\Rightarrow x^4-16=0$ $\Rightarrow (x^2-4)(x^2+4)=0\Rightarrow (x-2)(x+2)(x^2+4)=0\Rightarrow$ soluțiile reale $x_1=2$ și $x_2=-2$.	2p 2p 1p
b)	$f'(x)=\left[\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]'$ $=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(x^2+1\right)'$ $=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x$ $=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$	1p 1p 1p 2p

www.mateinfo.ro

c)	$\sqrt{x^2+1}>0$	1p
	Dacă $x>0 \Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0$	1p
	$\Rightarrow f'(x)>0$ pentru $x>0$	1p
	$\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$	2p
2. a)	$I_1=\int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1 \dfrac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx$	2p
	$=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big\|_0^1$	2p
	$=\dfrac{1}{2}\ln 2$.	1p
b)	$I_n=\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x^2}dx=\int_0^1 \dfrac{x^{n-2}+x^n-x^{n-2}}{1+x^2}dx$	1p
	$=\int_0^1 \dfrac{x^{n-2}+x^n}{1+x^2}dx-\int_0^1 \dfrac{x^{n-2}}{1+x^2}dx$	1p
	$=\int_0^1 \dfrac{x^n(x^{-2}+1)}{1+x^2}dx-I_{n-2}=\int_0^1 x^{n-2}dx-I_{n-2}$	1p
	$=\dfrac{1}{n-1}-I_{n-2}$.	2p
c)	$I_{2n+1}=\int_0^1 \dfrac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx=\dfrac{1}{2n}-I_{2n-1}$	2p
	$=\dfrac{1}{2n}-\left(\dfrac{1}{2(n-1)}-I_{2n-3}\right)=\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2(n-1)}+I_{2n-3}$	1p
	$=\ldots=\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2(n-1)}+\dfrac{1}{2(n-2)}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{2}+(-1)^n\cdot I_1=$	2p
	$=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\dfrac{1}{k}+(-1)^n\dfrac{1}{2}\ln 2$.	

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Alexandru Elena-Marcela

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=i, \quad \overline{z}=-i$ $a=0, \quad b=-1.$	3p 2p
2.	$V(x_V, y_V), \quad x_V=-\frac{b}{2a}, \quad y_V=-\frac{\Delta}{4a}$ $x_V=\frac{6}{2}=3, \quad y_V=-\frac{16}{4}=-4$ $V(3,-4).$	1p 2p 2p
3.	$3^x+\left(3^2\right)^{\frac{x+1}{2}}=36$ $3^x+3^{x+1}=36 \Rightarrow 3^x(1+3)=36 \Rightarrow 3^x \cdot 4=36$ sau $3^x=t>0 \Rightarrow t+3t=36 \Rightarrow t=9 \Rightarrow 3^x=9 \Rightarrow x=2$ $3^x=9 \Rightarrow x=2$	1p 2p 2p
4.	$M \times M$ are 36 elemente $\Rightarrow$ 36 cazuri posibile (x, y) pentru care $x+y=5$ sunt (1,4), (4,1), (2,3), (3,2) $\Rightarrow$ 4 cazuri favorabile P=$\frac{nr.\ cazuri\ favorabile}{nr.\ cazuri\ posibile}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$	2p 3p

www.mateinfo.ro

5.	$A(1,a)$, $B(4,1)$, $C(-1,-4)$ sunt coliniare dacă: $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$	2p
	$\Leftrightarrow 1-16-a+1-4a+4=0 \Leftrightarrow -5a=10 \Rightarrow a=-2$	3p
6.	$\sin B = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	2p
	$\frac{AC}{\sin B} = 2R$	1p
	$\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \Rightarrow \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2R \Rightarrow R = 2\sqrt{3}$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$AX = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3x & 5+3y \\ x & y \end{pmatrix}$	2p
	$XA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 14 \\ x & 3x+y \end{pmatrix}$	2p
	$A+X = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ x & y+1 \end{pmatrix}$.	1p
b)	$AX = XA \Rightarrow \begin{pmatrix} 3+3x & 5+3y \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 14 \\ x & 3x+y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3+3x=3 \\ 5+3y=14 \\ y=3x+y \end{cases}$	3p
	$\Rightarrow x=0, \quad y=3$.	2p
c)	$n=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1p
	Presupunem adevărată relația pentru A^n și demonstrăm că $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2p
	$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3+3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2p

www.mateinfo.ro

2.	$\Delta = 0$	1p
a)	$\Delta = 4m^2 - 4(m+1)^2 = 4m^2 - 4(m^2+2m+1) = -8m - 4 = 0$	3p
	de unde rezultă $m = -\frac{1}{2}$.	1p
b)	$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow 2 = -\frac{2m}{2(m+1)} \Rightarrow -2m = 4m+4$	3p
	$\Rightarrow 6m = -4 \Rightarrow m = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$.	2p
c)	$m = 2 \Rightarrow f(x) = (2+1)x^2 + 2\cdot 2x + 2 + 1 \Rightarrow f(x) = 3x^2 + 4x + 3$	2p
	$3x^3 + x^2 - x - 3 \mid 3x^2 + 4x + 3$ $-3x^3 - 4x^2 - 3x \mid x - 1$ $/ -3x^2 - 4x - 3$ $+3x^2 + 4x + 3$ $/ \quad / \quad /$	2p
	$g(x) = (3x^2 + 4x + 3)(x-1) \Rightarrow f(x) / g(x)$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-2}{x+!}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[1+\left(-\frac{2}{x+1}\right)\right]^x$	2p
a)	$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right]^{\frac{-2x}{x+1}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}$	2p
	$= e^{-2}$.	1p
b)	$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$	1p
	$= \frac{(x-1)'\cdot(x+1) - (x-1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}$	1p

www.mateinfo.ro

	$=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}$	1p
	$=\frac{2}{(x+1)^2}$.	2p
c)	Funcția este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	1p
	$\Rightarrow f''(x)=\frac{-4}{(x+1)^3}$.	1p
	Deoarece $f''(x)>0, x\in(-\infty,-1)$	1p
	$\Rightarrow f$ este convexă pe intervalul $(-\infty,-1)$.	2p
2.	$0\le x^n e^{1-x}\le 1, \quad (\forall)\ x\in[0,1]$	2p
a)	$0\le \int_0^1 x^n e^{1-x}dx\le 1$	2p
	$0\le f_n(x)\le 1$.	1p
b)	$\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1 xe^{1-x}dx=-\int_0^1 x\cdot(-1)\cdot e^{1-x}dx$	1p
	$=-\int_0^1 x\cdot(e^{1-x})'dx=-[xe^{1-x}\mid_0^1-\int_0^1 e^{1-x}dx]$	1p
	$=-(1+\int_0^1(-1)\cdot e^{1-x}dx)=$	1p
	$=-1-e^{1-x}\mid_0^1=-1-(1-e)=-1-1+e=e-2$.	2p
c)	$I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}dx=\int_0^1 x^n\cdot(-e^{1-x})'dx$	2p
	$=x^n\cdot(-e^{1-x})\mid_0^1+n\int_0^1 x^{n-1}e^{1-x}dx$	1p
	$=-1+nI_{n-1}$	2p
	$=nI_{n-1}-1, \quad (\forall)\ n\ge 2$.	

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 4

Prof. Badea Daniela

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2\left(5-\sqrt{3}\right)+\log_2\left(5+\sqrt{3}\right)-\log_2 11=\log_2 22-\log_2 11=$	3p
	$=\log_2 2=1$	2p
2.	$S=2\left(1+2+3+...+2012\right)-2012=$	2p
	$=2\cdot\frac{2012\cdot 2013}{2}-2012=$	2p
	$=2012^2$	1p
3.	$2^{x^2+x+0,5}=2^{\frac{5}{2}}\Leftrightarrow$	1p
	$x^2+x-2=0\Leftrightarrow$	2p
	$\Leftrightarrow x\in\{-2,1\}$	2p
4.	$x\in\mathbb{N}, 2\le x\le 10$	1p
	Formula de calcul a combinărilor	1p
	$x\ge 6$	2p
	$\Rightarrow x\in\{6,7,8,9,10\}$	1p
5.	Formula pentru coordonatele mijlocului unui segment	2p
	$A(2,2), B(-2,-2)$ şi $C(4,0)$	3p
6.	$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=$	1p
	$=\left(\frac{5}{13}\right)^2$	1p
	$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow\cos\alpha<0$	1p
	$\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{5}{13}$	2p

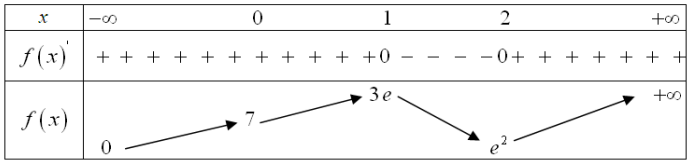
SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A(x)=x\left(x^2+3\right)$	3p
	$A(x)$ inversabilă $\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}^*$	2p

www.mateinfo.ro

b)	$\det A(1)=4\Rightarrow A(1)$ inversabilă	1p
	$A^*(1)=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&2\\2&0&2\end{pmatrix}$	2p
	$A^{-1}(1)=\frac{1}{d}A^*(1)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	2p
c)	$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}(1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=$	3p
	$=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	2p
2. a)	$U(\mathbb{Z}_6)=\{\hat{1},\hat{5}\}$	2p
	$\mathbb{Z}_6-U(\mathbb{Z}_6)=\{\hat{0},\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$	1p
	$S=\hat{3}$	2p
b)	$\det A=\hat{3}x+\hat{4}$	2p
	$\det A=\hat{1}\Leftrightarrow\hat{3}x+\hat{4}=\hat{1}\Leftrightarrow\hat{3}x=\hat{3}\Leftrightarrow x\in\{\hat{1},\hat{3},\hat{5}\}$	1p 1p
	$\det A=\hat{5}\Leftrightarrow\hat{3}x+\hat{4}=\hat{5}\Leftrightarrow\hat{3}x=\hat{1}\Leftrightarrow x\in\Phi$	1p
	$\Rightarrow x\in\{\hat{1},\hat{3},\hat{5}\}$	
c)	$(x,y)\in\{(\hat{1},\hat{2})\}$	5p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$l=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+7}{e^{-x}}$	1p
	Se aplică regula lui l'Hospital de două ori şi se obţine	2p
	$l=0\Rightarrow$	1p
	$\Rightarrow d: y=0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$	1p
b)	F derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x)=e^x(x^2-3x+2)$	1p
	$f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{1,2\}, f(1)=3e, f(2)=e^2$	1p
		2p
	$\Rightarrow 1$ – maxim local, 2 –	

www.mateinfo.ro

	minim local	1p
c)	$f(0)=7, f(1)=3e, f(2)=e^2$	1p
	$7 \le e^2$	1p
	Conform tabelului de la b) $\Rightarrow 7 \le f(x) \le 3e, \ (\forall) x \in [0,2]$	3p
2.	f continuă	1p
a)	$\int_{-1}^{0} \sin x dx = -1+\cos 1$	1p
	$\int_{0}^{1} \frac{x}{x+2} dx = x\Big\|_0^1 - 2\ln(x+2)\Big\|_0^1 =$	1p
	$=1-2\ln\frac{3}{2}$	1p
	$I=\cos 1-2\ln\frac{3}{2}$	1p
b)	$I=\int_{-\pi}^{0} \sin^2 x dx$	2p
	$I=\frac{\pi}{2}$	1p
	$V=\pi\int_{-\pi}^{0} f^2(x)dx=\pi\int_{-\pi}^{0}\sin^2 x dx=\frac{\pi^2}{2}$	2p
c)	$\int_{0}^{x} f(t)dt = x-2\ln(x+2)+2\ln 2$	2p
	$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{0}^{x} f(t)dt=1$	3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 5

Prof. Badea Daniela

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ progresie aritmetică, $a_1=2, r=3$	1p
	$S_n=155 \Leftrightarrow 3n^2+n-310=0, n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow n=10$	3p
	$x=a_{10}=29.$	1p
2.	$\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1\cdot x_2=m \\ \|x_1-x_2\|=1 \end{cases} \Rightarrow$	2p

www.mateinfo.ro

	$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 - 2m \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$	2p
	$1 - 2m - 2m = 1 \Leftrightarrow m = 0$	1p
3.	$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 5 - 2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$	1p
	Prin ridicare la pătrat se obţine $4x^2 - 21x + 26 = 0$	1p
	$x_1 = 2 \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$	1p
	$x_2 = \frac{13}{4} \notin \left[1, \frac{5}{2}\right]$	1p
	$\Rightarrow S = \{2\}$	1p
4.	$A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$	1p
	$C_{10}^2 = 5 \cdot 9 = 45$	1p
	$3P_3 = 3 \cdot 6 = 18$	1p
	$N = 9 \cdot 17 \vdots 17$	2p
5.	$\Delta \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 2x & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3x$	2p
	$\frac{\lvert\Delta\rvert}{2} = 3 \Rightarrow \lvert x\rvert = 2$	2p
	$x_{1,2} = \pm 2$	1p
6.	$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} =$	1p
	$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} =$	2p
	$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) =$	1p
	$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$	1p

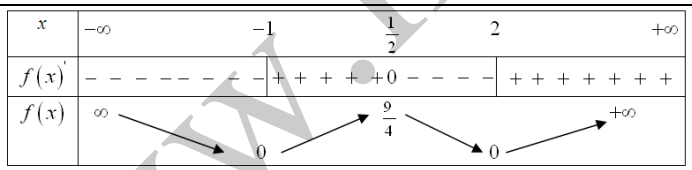
SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Demonstrarea relaţiei	5p
b)	$A^n(a,b) = A\left(a^n, na^{n-1}b\right), (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$	3p
	Demonstrarea prin inducţie sau cu metoda binomială	2p
c)	$a^{2012} = 1 \Rightarrow a = \pm 1$	2p
	$2012a^{2011}b = 2012$	1p
	$a = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow A(1,1)$	1p
	$a = -1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow A(-1,-1)$	1p

www.mateinfo.ro

2. a)	$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(-1)=-4 \end{cases} \Leftrightarrow$	2p
	$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$	3p
b)	Relaţiile lui Viette	2p
	$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{s_2}{s_3}=1$	1p
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2-2$	1p
	$a^2-2=1 \Leftrightarrow a_{1,2}=\pm\sqrt{3}$	1p
c)	$\Delta = s_1\left[s_2-\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\right]=$	3p
	$=1(1+1)=2$	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)=\begin{cases} x^2-x-2;\ x\in(-\infty,-1]\cup[2,\infty) \\ -x^2+x+2;\ x\in(-1,2) \end{cases}$	1p
	f derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$ (funcţii elementare) şi	1p
	$f'(x)=\begin{cases} 2x-1;\ x\in(-\infty,-1)\cup(2,\infty) \\ -2x+1;\ x\in(-1,2) \end{cases}$	1p 1p 1p
	$f_s'(-1)=-3, f_d'(-1)=3, \Rightarrow f$ nu e derivabilă în -1	1p
	analog f nu e derivabilă în 2	
	$\Rightarrow D'=\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$	
b)		3p
	Concluzia conform tabelului	2p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=\infty \Rightarrow h$ nu are asimptotă orizontală	1p 1p
	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}=1$	2p
	$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(h(x)-x\right)=-\frac{1}{2}$	1p
	$d: y=x-\frac{1}{2}$ asimptotă oblică spre ∞	

www.mateinfo.ro

2. a)	f continuă pe $(0,e)\cup(e,\infty)$ - funcţii elementare	2p
	$f_s(e)=f(e)=f_d(e)=1\Rightarrow f$ continuă în e	1p
	$\Rightarrow f$ continuă pe $(0,\infty)\Rightarrow f$ admite primitive pe $(0,\infty)$	2p
b)	$h(x)\le 0\,(\forall)\,x\in\left[e^{-1},1\right]$	1p
	$A=-\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\ln x\,dx$	1p
	Integrând prin părţi $\Rightarrow A=\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Big\|_{\frac{1}{e}}^{1}=$	2p
	$=\frac{e^2-3}{4e^2}$	1p
c)	$\ln x\le x-1\ (\forall)\,x\in[1,2]$	1p
	şi $\ln x\ge 0,\ x-1\ge 0\ (\forall)\,x\in[1,2]$	1p
	$\Rightarrow \ln^{2012} x\le (x-1)^{2012}\ (\forall)\,x\in[1,2]$	1p
	prin integrare pe $[1,2]\Rightarrow$	1p
	$\Rightarrow \int_1^2 f^{2012}(x)\,dx\le\frac{1}{2013}$	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 6

Prof . BadeaDaniela

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\lvert 2x-1\rvert\le 3\Leftrightarrow -3\le 2x-1\le 3$	2p
	$-1\le x\le 2$	1p
	dar $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow A=\{-1,0,1,2\}$	1p
	$\Rightarrow \text{card}A=4$	1p
2.	$A(0,3)\in G_f\Leftrightarrow f(0)=3\Leftrightarrow b=3$	2p
	$-\frac{a}{2}=1\Leftrightarrow a=-2$	2p
	$\Rightarrow f(x)=x^2-2x+3$	1p
3.	$CE: x^2-2x>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$	1p
	$x^2-2x-3=0$	2p
	$x_1=-1,\ x_2=3\overset{CE}{\Rightarrow} S=\{-1,3\}$	2p

www.mateinfo.ro

4.	$C_{10}^3 =$ $=120$	3p 2p
5.	$x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Rightarrow$ $m^2 - 2m + 1 = 0$ $m = 1$	2p 2p 1p
6.	$\cos\left(180^0 - x\right) = -\cos x$ $\cos 90^0 = 0$ $S = 0$	2p 1p 2p

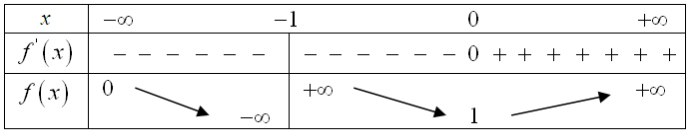
SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2 = 2I_2$ $A^{2012} = 2^{1006} \cdot I_2$;	3p 2p
b)	$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$; $XA = AX$ $\Rightarrow \begin{cases} t = x \\ y = 2z \end{cases}$ finalizare	1p 3p 1p
c)	$A^{2k} = 2^k I_2, (\forall) k \in \mathbb{N}^*$ $A^{2k+1} = 2^k A, (\forall) k \in \mathbb{N}$ $A+A^3+A^5+....+A^{2011} = A + 2A + 2^2A + ... + 2^{1005}A =$ $= \left(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{1005}\right)A = \left(2^{1006} - 1\right)A$ $A^2+A^4+A^6+....+A^{2012} = \left(2 + 2^2 + ... + 2^{1006}\right)I_2 = 2\left(2^{1006} - 1\right)I_2.$	1p 1p 2p 1p
2. a)	Definiţia elementului neutru $e = 5 \in \mathbb{Z}$	2p 3p
b)	Definiţia elementului simetrizabil $3' = 3 \in \mathbb{Z}$	2p 3p
c)	$x * y = (x-4)(y-4) + 4$ $S = (a*4)*b = 4*b = 4$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)' = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$, $f(1)' = \dfrac{e}{4}$ $t: y - \dfrac{e}{2} = \dfrac{e}{4}(x-1) \Leftrightarrow ex - 4y + e = 0$	2p 3p
b)	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) \infty$	3p 2p

www.mateinfo.ro

c)	 concluzia	4p 1p
2. a)	Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitivă pentru $f\Rightarrow$ $\Rightarrow F$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x)=f(x)$ $F'(x)=3x^2+1>0(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ $\Rightarrow F$ strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	2p 2p 1p
b)	$\int f(x)dx=x^3+x+\mathscr{C}$ Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=x^3+x+c$ $A(1,3)\in G_F\Leftrightarrow F(1)=3\Leftrightarrow 2+c=3\Leftrightarrow c=1$ $F(x)=x^3+x+1$	2p 1p 1p 1p
c)	$g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=(x+1)e^x$ $\int_0^1 g(x)dx=(x+1)e^x\Big\|_0^1-e^x\Big\|_0^1=$ $=2e-1-e+1=e$	1p 3p 1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 7

Prof: Badea Daniela

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a=\sum_{k=1}^{2012}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=$	2p
	$=1-\frac{1}{\sqrt{2013}}$	2p
	$0<a<1\Rightarrow [a]=0$	1p
2.	$m=1\Rightarrow 1\geq 0$ (A)	1p
	$m\neq 1\Rightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ (m-1)(5m-9)\leq 0 \end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(1,\frac{9}{5}\right]$	2p
	$\Rightarrow m\in\left[1,\frac{9}{5}\right]$	1p
3.	$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=1\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow$	3p
	$x-\frac{\pi}{6}\in\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$	2p
4.	$n\in\mathbb{N},\ n\geq 13$	1p
	$C_n^4=C_n^{13}\Rightarrow$	1p
	$\Rightarrow n-4=13\Leftrightarrow n=17$	3p
5.	Fie $M(\alpha,\beta)$ a.î. $M\in d_m,(\forall)m\in\mathbb{R}$	1p
	$\Rightarrow m(2\alpha+\beta-1)+(-\alpha+\beta+5)=0,(\forall)m\in\mathbb{R}$	2p
	$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta-1=0 \\ -\alpha+\beta+5=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=-3 \end{cases}\Rightarrow M(2,-3)$	2p
6.	$\arccos\frac{12}{13}=x\Rightarrow\cos x=\frac{12}{13}$ şi $x\in[0,\pi]$	2p
	$\Rightarrow \sin x>0$ şi $x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\frac{5}{13}$	3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	1p
	$A^2=3A$	4p

www.mateinfo.ro

b)	$A^n = 3^{n-1} \cdot A \left(\forall\right) n \in \mathbb{N}^*$ Demonstrarea propoziţiei prin inducţie	2p 3p
c)	$A + A^2 + A^3 + ... + A^{2012} = \left(1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{2011}\right) \cdot A =$ $= \dfrac{3^{2012} - 1}{2} \cdot A$	2p 3p
2. a)	$A_x \cdot A_y = A_{x+y}$ finalizare	4p 1p
b)	„$\cdot$" asociativă pe $\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right)$, $G \subset \mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right) \Rightarrow$ „$\cdot$" asociativă pe G I_3 element neutru pentru „$\cdot$" în $\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right)$ $I_3 = A_0 \in G$ $\Rightarrow A_0$ element neutru pentru „$\cdot$" în G $A_{x'} = A_{-x} \in G$ $A_x \cdot A_y = A_{x+y} = A_{y+x} = A_y \cdot A_x$ finalizare	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$f : \mathbb{Z} \to G, f\left(x\right) = A_x$ f morfism f injectivă f surjectivă	2p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f_2\left(x\right) = x^3 + 2x^2 + x - 1$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f_2'\left(x\right) = 3x^2 + 4x + 1$ $f_2'\left(x\right) = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow -1$ maxim local; $-\dfrac{1}{3}$ minim local	1p 1p 2p 1p
b)	$f_1\left(x\right) = x^3 + x^2 + x - 1$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f_1'\left(x\right) = 3x^2 + 2x + 1$ $f_1'\left(x\right) > 0\ \left(\forall\right) x \in \mathbb{R} \Rightarrow f_1$ strict crescătoare $\Rightarrow f_1$ injectivă $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1\left(x\right) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to \infty} f_1\left(x\right) = \infty$ f_1 continuă $\Rightarrow f_1$ are pr. Darboux $\Rightarrow \text{Im } f_1 = \mathbb{R} \Rightarrow f_1$ surjectivă $\Rightarrow f_1$ bijectivă $\Leftrightarrow f_1$ inversabilă $\left(f_1^{-1}\right)'\left(2\right) = \dfrac{1}{f_1'\left(x_0\right)}$, unde $f_1\left(x_0\right) = 2$ care are soluţia unică $x_0 = 1$	1p 1p 1p 1p

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f_2'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f_2(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\frac{31}{27}$	↗	$+\infty$

www.mateinfo.ro

	$\left(f_1^{-1}\right)'(2)=\dfrac{1}{f_1'(1)}=\dfrac{1}{6}$	1p
c)	ecuaţia devine $x^3+mx^2-x+1=0;\quad x=0$ nu este soluţie	1p
	Soluţiile ecuaţiei date sunt aceleaşi cu ale ecuaţiei $x+m-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$	1p
	Fie $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ g(x)=x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+m$	1p
	Utilizând şirul lui Rolle ecuaţia are trei soluţii reale $\Leftrightarrow m\in(-\infty,-1]$	2p
2. a)	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f_2(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^2 x\,dx=$	1p
	$=\operatorname{tg}x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}}-x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}}=$	3p
	$=\dfrac{4-\pi}{4}$	1p
b)	$0\le x\le\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow 0\le\operatorname{tg}x\le 1\Leftrightarrow 0\le\operatorname{tg}^n x\le 1\Leftrightarrow$	1p
	$\Leftrightarrow 0\le\ln\left(1+\operatorname{tg}^n x\right)\le\ln 2\Leftrightarrow 0\le I_n\le\dfrac{\pi\ln 2}{4}\Rightarrow(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mărginit (1)	1p
	$\operatorname{tg}^n x\ge\operatorname{tg}^{n+1}x\ (\forall)x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$	1p
	$\Rightarrow I_n\ge I_{n+1}(\forall)n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ descrescător (2)	1p
	$(1),(2)\Rightarrow(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent	1p
c)	$(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ descrescător $\Rightarrow\max\{I_n\mid n\in\mathbb{N}^*\}=I_1$	2p
	$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\operatorname{tg}x)dx$. Făcând schimbarea de variabilă $\dfrac{\pi}{4}-x=y$ obţinem $2I_1=\dfrac{\pi\ln 2}{4}$	3p
	$\Rightarrow I_1=\dfrac{\pi\ln 2}{8}$	1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 8

Prof: Badea Daniela

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_6+a_{12}+a_{22}+a_{42}=40 \Leftrightarrow 4a_1+78r=40 \Leftrightarrow 2a_1+39r=20$	3p
	$\Rightarrow S_{40}=\frac{(2a_1=39r)\cdot 40}{2}=400$	2p
2.	$2[x]^2-3[x]+1=0$	1p
	notăm $[x]=a \Rightarrow 2a^2-3a+1=0 \Rightarrow a_1=\frac{1}{2}, a_2=1$	2p
	$[x]=\frac{1}{2}\notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ nu are soluţii	1p
	$[x]=1 \Leftrightarrow 1\le x<2 \Leftrightarrow x\in[1,2)$	1p
3.	$A(0,-1)\in G_f \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow c=-1$	1p
	$-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}; -\frac{\Delta}{4a}=\frac{3}{4}; a<0$	2p
	$\Rightarrow a=-1; b=1; c=-1 \Rightarrow f(x)=-x^2+x-1$	2p
4.	$4^n=2^n+992$	1p
	$2^n=t \Rightarrow t^2-t-992=0 \Rightarrow t_1=32$ şi $t_2=-31<0$	2p
	$2^n=32 \Leftrightarrow n=5$	2p
5.	$A(3,1); B(1,-3); C(1,0)$	1p
	$\overrightarrow{CA}=2\vec{i}+\vec{j}; \overrightarrow{CB}=-3\vec{j}$	2p
	$\cos C=\frac{-2}{\sqrt{5}}<0 \Rightarrow C$ obtuz	2p
6.	$\sin x=\frac{5}{13}$	2p
	$\cos x=\frac{12}{13}$	2p
	$E=\frac{104}{29}$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A_1=1\neq 0 \Rightarrow A_1$ inversabilă	1p
	$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$	

www.mateinfo.ro

		4p
b)	$A_x^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&0&0\\0&x&0\end{pmatrix}=B;\quad A_x^3=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{pmatrix}=x\cdot I_3$	2p
	$\Rightarrow A_x^4=x\cdot A_x;\quad A_x^5=x\cdot B;\quad A_x^6=x^2\cdot I_3$	1p
	prin inducție $\Rightarrow A_x^{3p}=x^p\cdot I_3;\quad A_x^{3p+1}=x^p\cdot A_x;\quad A_x^{3p+2}=x^p\cdot B$	1p
c)	$I_3+A_x+B=\begin{pmatrix}x&1&1\\x&x&1\\x&x&x\end{pmatrix}=C\Rightarrow$	1p
	$B_{3p}=x^p\cdot C;B_{3p+1}=x^p\cdot C;B_{3p+2}=x^p\cdot\begin{pmatrix}x&x&1\\x&x&x\\x&x&x\end{pmatrix}$	2p
	$\det C=x(x-1)^2;\quad \det B_{3p}=x^{3p+1}(x-1)^2$	1p
	$\det B_{3p+1}=x^{3p+1}(x-1)^2;\quad \det B_{3p+2}=x^{3p+2}(x-1)^2$	1p
	Matricele B_n sunt inversabile $\Leftrightarrow x\neq 0$ și $x\neq 1$	1p
2. a)	$f(x)=(x-1)(x-2)c(x)+r(x),\quad r=ax+b$	2p
	$x=1\Rightarrow a+b=4$	1p
	$x=2\Rightarrow 2a+b=8$	1p
	$\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=0\end{cases}\Rightarrow r=4x$	1p
b)	$f(3)=5^{2012}+13$	1p
	$5^{2012}=(5^2)^{1006}=(26-1)^{1006}=\sum_{k=0}^{1005}C_{1006}^k 26^{1006-k}(-1)^k+1=a+1$ unde $a\vdots 13$	3p
	$\Rightarrow r=1$	1p
c)	$s=\sum_{k=3}^{n}k^2-3\sum_{k=3}^{n}k+2(n-2)$	1p
	Calculul fiecărei sume	2p
	$s=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3}$	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

www.mateinfo.ro

1. a)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow f$ nu are asimptotă orizontală	1p
	$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$	1p
	$n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=-\dfrac{1}{3}$	2p
	$\Rightarrow d: y=x-\dfrac{1}{3}$ asimptotă oblică spre $-\infty$	1p
b)	f continuă pe $\mathbb{R}$	1p
	f derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$	2p
	$f_s'(0)=\infty,\ f_d'(0)=-\infty \Rightarrow f$ nu e derivabilă în 0	1p
	$f_s'(1)=f_d'(1)=\infty \Rightarrow f$ nu e derivabilă în 1	1p
c)	$x_1=0$ - punct de întoarcere şi punct de maxim local	3p
	$x_2=1$ - punct de inflexiune	2p
2. a)	$f(x)\le 0\ \ (x)\in[0,1]\Rightarrow A=-\int_0^1 f(x)\,dx$	2p
	Se aplică de două ori integrarea prin părţi	3p
	A=*e*	1p
b)	F derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x)=e^x\left(x^2-2\right)$	2p
	$F'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$	1p
	$-\sqrt{2}$ maxim local, $\sqrt{2}$ minim local.	2p
c)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitivă pentru $f\Rightarrow$	1p
	$\Rightarrow F$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x)=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}$	
	$\Rightarrow L=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{F(\sin x)-F(0)}{\sin x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$	1p
	$\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{F'(\sin x)\cdot(\sin x)'}{(\sin x)'}=$	1p
	$=\lim\limits_{x\to\pi} f(\sin x)=-2$	2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 9

Prof: Badea Daniela

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$S=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{2012}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=$	2p
	$=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2013}}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{8049}\right)=$	2p
	$=\frac{2012}{8049}$	1p
2.	$\begin{cases}x_1+x_2=3\\ x_1\cdot x_2=2\left(\lvert m\rvert-1\right)\end{cases}$	2p
	$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+2x_1\cdot x_2=9\Rightarrow 5+4\left(\lvert m\rvert-1\right)=9$	2p
	$\lvert m\rvert=2\Leftrightarrow m\in\{\pm 2\}$	1p
3.	$CE: 9-2^x>0\Leftrightarrow x<\log_2 9$	1p
	ecuaţia este echivalentă cu $9-2^x>2^{3-x}$	1p
	notăm $2^x=t\Rightarrow 9-t>\frac{8}{t}\Rightarrow t\in(1,8)$	1p
	$1<2^x<8\Leftrightarrow 0<x<3$	1p
	$3<\log_2 9\Leftrightarrow 8<9\Rightarrow x\in(0,3)$	1p
4.	$f:\{a,b,c\}\to\{1,2,3,4,5\}$	2p
	Numărul nr. $=5^3$	2p
	Numărul cazurilor favorabile 2^3	1p
	$P=\frac{8}{125}$	
5.	$C\in Oy\Rightarrow C(0,y)$	1p
	$\Delta=\begin{vmatrix}0 & y & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}=-2y-10$	1p
	$\frac{\lvert\Delta\rvert}{2}=3\Rightarrow\lvert y+5\rvert=3$	1p
	$y+5=3\Rightarrow y=-2\Rightarrow C(0,-2)$	1p
	$y+5=-3\Rightarrow y=-8\Rightarrow C(0,-8)$	1p

www.mateinfo.ro

6.	$\sin\alpha+\sin\beta\le\sqrt{4-(\cos\alpha+\cos\beta)^2}\Leftrightarrow$ $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\le 4-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta$ $\Leftrightarrow \sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\le 1$ $\Leftrightarrow \cos(\alpha-\beta)\le 1\ \ (A)$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=\alpha(\beta^2-1)$ (S) compatibil determinat $\Leftrightarrow \det A\neq 0$ $\Leftrightarrow \alpha\in\mathbb{C}^*;\beta\in\mathbb{C}\setminus\{\pm1\}$	3p 1p 1p
b)	$\beta=-1\Rightarrow A=\begin{pmatrix}\alpha&-1&2\\ \alpha&-3&3\\ \alpha&-1&1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ $\det A=0$ $\begin{vmatrix}-1&2\\-3&3\end{vmatrix}=3\neq 0$ minor principal $\begin{vmatrix}-1&2&1\\-3&3&1\\-1&1&-3\end{vmatrix}=-12\Rightarrow(S)$ incompatibil	1p 1p 1p 2p
c)	$\beta=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix}\alpha&1&2\\ \alpha&1&3\\ \alpha&1&4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\ \det A=0;\ \begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1\neq 0$ minor principal $\begin{vmatrix}1&2&1\\1&3&1\\1&4&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow(S)$ compatibil simplu nedeterminat $\begin{cases}x=\lambda\\ y=1-\alpha\lambda,\ \lambda\in\mathbb{C}\\ z=0\end{cases}$ $x_0^2+y_0=(z_0-1)^{2012}\Leftrightarrow\lambda(\lambda-\alpha)=0\Rightarrow$ $\lambda=0\Rightarrow(0,1,0)$ sau $\lambda=\alpha\Rightarrow(\alpha,1-\alpha^2,0)$	1p 1p 1p 1p 1p
2. a)	$\begin{cases}x+y+\hat{2}z=\hat{0}\\ y+z=\hat{1}\\ z=\hat{2}\end{cases}$	2p 3p

www.mateinfo.ro

	$\begin{cases} x=\hat{0} \\ y=\hat{2} \\ z=\hat{2} \end{cases}$	
b)	Parte stabilă Asociativitate Element neutru Elemente simetrizabile Comutativitate	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$\text{card}\mathbb{Z}_3=3$ $\Rightarrow \text{card}G=27$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	f_n derivabile pe $\mathbb{R}$ şi $f_n^{'}(x)=2x(1+x)^n+x^2\cdot n(1+x)^{n-1}$ $f_n^{'}(1)=12\Rightarrow 2^{n+1}+n\cdot 2^{n-1}=12$ $n=2\in\mathbb{N}^*$ soluţie unicitatea soluţiei	2p 1p 1p 1p
b)	$f_2(x)=x^4+2x^3+x^2$ $f_2^{'}(x)=4x^3+6x^2+2x=2x(2x^2+3x+1)$ $f_2^{'}(x)=0\Rightarrow x\in=\left\{-1,-\frac{1}{2},0\right\}$ $-1,-\frac{1}{2},0$ puncte de extrem local $\Rightarrow\sum f_2(x_k)=f_2(-1)+f_2\left(-\frac{1}{2}\right)+f_2(0)=\frac{1}{16}$	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$x^2(1+x)^n=C_n^0x^2+C_n^1x^3+C_n^2x^4+.....+C_n^nx^{n+2}$ Prin derivare obţinem $f_n^{'}(x)=2C_n^0x+3C_n^1x^2+4C_n^2x^3+.....+(n+2)C_n^nx^{n+1}$ pentru $x=1\Rightarrow 2C_n^0+3C_n^1+4C_n^2+.....+(n+1)C_n^{n-1}+(n+2)C_n^n=$ $=f_n^{'}(1)=(n+4)\cdot 2^{n-1}$ limita devine $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+4}{2n}=\frac{1}{2}$	1p 1p 1p 1p 1p 1p
2. a)	$\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{1}{f^2(x)}dx=arctg(x+1)\Big\|_0^{\sqrt{3}-1}=$ $=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$	3p 2p
b)	Aplicarea metodei de integrare prin părţi	3p

www.mateinfo.ro

	$I=\frac{2\sqrt{5}-2}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$	2p
c)	$a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\cdot\frac{k}{n}+2}$	2p
	Justificarea faptului că $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_n)$	2p
	$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1 f(x)\,dx=$ valoarea de la punctul b	1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 10

Prof . Badea Ion

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$r=3$	1p
	$a_1=-15$	1p
	$S_n=0\Leftrightarrow n=11$	3p
2.	$x\neq 1$	1p
	$\frac{x^2-x-6}{x-1}\leq 0$	1p
	$x\in(-\infty,-2]\cup(1,3]$	2p
	$A=\{2,3\}$	1p
3.	$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}=\frac{13}{9}$	1p
	$\left(\frac{2}{3}\right)^x=t\Rightarrow\frac{2}{3}\cdot t+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{t}=\frac{13}{9}$	1p
	$\Leftrightarrow 6t^2-13t+6=0\Rightarrow t_1=\frac{3}{2},t_2=\frac{2}{3}$	1p
	$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{3}{2}\Rightarrow x=-1$	1p
	$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{3}\Rightarrow x=1$	1p
4.	$A_5^3-A_4^2=$	3p
	$=60-12=48$	2p
5.	$B'\left(\frac{5}{2},1\right),O(0,0)$ mijloacele laturilor	2p
	ecuaţia dreptei determinate de două puncte	1p
	$OB'\colon 2x-5y=0$	2p
6.	$p=9$	1p
	$S=\sqrt{9\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=6\sqrt{6}$	2p
	$r=\frac{S}{p}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$	2p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=\begin{vmatrix} a^2 & a & -1 \\ b^2 & b & -1 \\ c^2 & c & -1 \end{vmatrix}=$	2p
	$=(b-a)(c-b)(c-a)$	3p
b)	$\mathrm{d}_x=(b-a)(c-b)(c-a)(a+b+c)$ $\mathrm{d}_y=-(b-a)(c-b)(c-a)(ab+bc+ac)$ $\mathrm{d}_z=-abc(b-a)(c-b)(c-a)$ $\Rightarrow x=a+b+c,\ y=-(ab+bc+ac),\ z=-abc$	3p 2p
c)	Fie t_1,t_2,t_3 rădăcinile ecuaţiei date	1p
	Fie $\Rightarrow\begin{cases} t_1+t_2+t_3=x=a+b+c \\ t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=-y=ab+bc+ac \\ t_1t_2t_3=-z=abc \end{cases}$	2p
	$\Leftrightarrow\begin{cases} t_1=a \\ t_2=b \\ t_3=c \end{cases}$	2p
2. a)	Suma coficienţilor polinomului f este egală cu $f(1)$	2p
	$f(1)=7^{2012}+14\Leftrightarrow$	1p
	$f(1)=7\left(7^{2011}+2\right)\vdots 7$	2p
b)	$\mathrm{g}=(x+2)(x+3)$	1p
	$f=(x+2)(x+3)\cdot q+r,\ \mathrm{grad}r<2\Rightarrow r=ax+b$	1p
	$\left.\begin{matrix} f(-2)=1^{2012}-8+10=3 \\ f(-2)=-2a+b \end{matrix}\right\}\Rightarrow -2a+b=3;\quad \left.\begin{matrix} f(-3)=(-1)^{2012}-12+10=-1 \\ f(-3)=-3a+b \end{matrix}\right\}\Rightarrow -3a+b=-1$	2p
	$\begin{cases} -2a+b=3 \\ -3a+b=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=4 \\ b=11 \end{cases}\Rightarrow r=4x+11$	1p
c)	$g(x)=(x+2)(x+3)\Rightarrow\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3},(\forall)x\in\mathbb{N}\Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+....+\dfrac{1}{2015}-\dfrac{1}{2016}\Leftrightarrow$	2p
	$\Leftrightarrow S=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2016}=\dfrac{1007}{2016}$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

www.mateinfo.ro

1. a)	$f'(x)=2\cdot e^{2x}+2x=2\left(e^{2x}+x\right)$	2p
	$f'(x)>0(\forall)x\in[0,1]$	2p
	$\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $[0,1]$	1p
b)	$f(0)=-1<0, f(1)=e^2-1>0$	1p
	f continuă pe $[0,1]$	1p
	$\Rightarrow f$ are cel puţin o rădăcină în $(0,1)$ (1)	1p
	f strict crescătoare pe $[0,1]$ (2)	1p
	$(1),(2)\Rightarrow f$ are o singură rădăcină în $(0,1)$	1p
c)	$f''(x)=2\left(2e^{2x}+1\right), f'''(x)=2^3e^{2x}\Rightarrow P_3(A)$ (I)	2p
	$P_k(A)\Rightarrow P_{k+1}(A)$	
	$f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left(2^ke^{2x}\right)'=2^{k+1}e^{2x}$ (A) (II)	2p
	Din (I) şi (II) $\Rightarrow P_n$ $(A)(\forall)n\in\mathbb{N}, n\geq 3$	1p
2. a)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{(x+1)^3}{3}-\frac{1}{3}}{x^3}=$	3p
	$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-1}{3x^3}=\frac{1}{3}$	2p
b)	$\int\frac{x}{(x+1)^2}dx=\int\frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}dx=$	1p
	$\int\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}dx=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+\mathcal{C}$	1p
	Fie $H(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+c,$	1p
	$H(0)=-1\Leftrightarrow 1+c=-1\Leftrightarrow c=-2$	1p
	$\Rightarrow H(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}-2$	1p
c)	$V=\int_0^1\pi f^2(x)\,dx=$	1p
	$=\pi\frac{(x+1)^5}{5}\Big\vert_0^1=$	2p
	$=\frac{31\pi}{5}$	2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 11

Prof . Badea Ion

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$N=\dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2012}-1}{-\frac{1}{3}-1}:\dfrac{3^{2012}-1}{3^{2012}}=$	3p
	$=\dfrac{3}{2}$	2p
2.	a şi b sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-x-12=0$	3p
	$\Rightarrow$numerele sunt -3 şi 4	2p
3.	$2\log_2 x-1\le 3$	1p
	$\Leftrightarrow \log_2 x\le 2$	1p
	$\Leftrightarrow x\le 4$	2p
	$\Rightarrow x\in\{1,2,3,4\}$	1p
4.	$x-\dfrac{20}{100}x=\dfrac{4}{5}x$	1p
	$\dfrac{110}{100}\cdot\dfrac{4}{5}x=1760$	2p
	$x=2000$	2p
5.	M mijlocul lui (AB) $\Rightarrow$M(1,2)	1p
	$m_{AB}=\dfrac{1}{2}$	1p
	d mediatoarea $\Rightarrow m_d=-2$	1p
	$d: 2x+y-4=0$	2p
6.	$\sin 0^0=0, \sin 90^0=1$	1p
	$\sin^2 15^0+\sin^2 75^0=\sin^2 15^0+\cos^2 15^0=1$	1p
	$\sin^2 30^0+\sin^2 60^0=1$	1p
	$\sin^2 45^0=\dfrac{1}{2}$	1p
	$S=\dfrac{7}{2}$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=4+m^2-m^2+2m-2m-m^2$	3p
	$=4-m^2$	2p

www.mateinfo.ro

b)	(S)sistemul este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ $4-m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$	2p 3p
c)	$m=0 \Rightarrow \det A = 4$ $d_x = 4, d_y = 4, d_z = -4 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x,y,z) \in \{(1,1,-1)\}$	1p 3p 1p
2. a)	$f_{a,b} \vdots (X-1) \Leftrightarrow f_{a,b}(1) = 0$ $f_{a,b}(1) = 2a^2 - 2ab + b^2 + 2a + 1 = (a-b)^2 + (a-1)^2$ $(a-b)^2 + (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ (a-1)^2 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow a = b = 1$	1p 2p 2p 1p
b)	x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f_{1,1} = 2X^3 - 2X^2 + X - 1 \Rightarrow$ $\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 1; \ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{1}{2}; \ s_3 = x_1x_2x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$ $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = s_1^2 - 2s_2 = 0$ $\begin{cases} 2x_1^3 - 2x_1^2 + x_1 - 1 = 0 \\ 2x_2^3 - 2x_2^2 + x_2 - 1 = 0 \\ 2x_3^3 - 2x_3^2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1^3 = 2x_1^2 - x_1 + 1 \\ 2x_2^3 = 2x_2^2 - x_2 + 1 \\ 2x_3^3 = 2x_3^2 - x_3 + 1 \end{cases}$ $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \frac{1}{2}(2S_2 - s_1 + 3) = 1$	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$2 \cdot 8^x - 2^{2x+1} + 2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{3x} - 2 \cdot 2^{2x} + 2^x - 1 = 0$ Notăm $2^x = t \Rightarrow 2t^3 - 2t^2 + t - 1 = 0$ $\Rightarrow (t-1)(2t^2+1) = 0 \Rightarrow t = 1$ $2^x = 1 \Rightarrow x = 0$	2p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \left(x\sqrt{3} - 2\right)^3$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $\left[-2, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ și strict crescătoare pe $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right]$	1p 2p 2p
b)	Fie pantele celor două tangente $m_1 = f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1$ $m_2 = f'\left(\sqrt{3}\right) = 1$ $m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow$ cele două tangente sunt perpendiculare	1p 1p 1p 2p

www.mateinfo.ro

c)	$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{x-\sqrt{3}}} \overset{(1^\infty)}{=} \lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left[\left(1+\left(f'(x)-1\right)\right)^{\frac{1}{f'(x)-1}}\right]^{\frac{f'(x)-1}{x-\sqrt{3}}} =$	2p
	$=e^{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{\left(x\sqrt{3}-2\right)^3-1}{x-\sqrt{3}}\left(\frac{0}{0}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{\left(x\sqrt{3}-3\right)\left[\left(x\sqrt{3}-2\right)^2+\left(x\sqrt{3}-2\right)+1\right]}{x-\sqrt{3}}} =$	2p
	$=e^{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\sqrt{3}\left(\left(x\sqrt{3}-2\right)^2+\left(x\sqrt{3}-2\right)+1\right)} = e^{3\sqrt{3}}$	1p
2. a)	$\int_{-1}^{1}(x+2)f_1(x)dx = \int_{-1}^{1}(x-1)dx =$	1p
	$=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big\|_{-1}^{1} =$	2p
	$=-2$	2p
b)	$I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x-1}{x+2}dx = \int_{-1}^{1}\left(1-\frac{3}{x+2}\right)dx =$	3p
	$=x\Big\|_{-1}^{1}-3\ln\left\|x+2\right\|\Big\|_{-1}^{1} = 2-3\ln 3$	2p
c)	$\Leftrightarrow I_{n+1}+3I_n = \int_{-1}^{1}\frac{(x-1)^{n+1}+3(x-1)^n}{x+2}dx =$	2p
	$=\int_{-1}^{1}(x-1)^n dx = \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\Big\|_{-1}^{1} =$	2p
	$=\frac{(-2)^{n+2}}{n+1},(\forall)n\in\mathbb{N}^*$	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 12

Prof . Badea Ion

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$	2p
	$\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}-1$	2p
	$N=0\in\mathbb{N}$	1p
2.	$\Delta=m^2-12$	1p
	$\Delta\geq 0\Leftrightarrow m^2-12\geq 0\Leftrightarrow$	2p
	$m\in\left(-\infty,-2\sqrt{3}\right]\cup\left[2\sqrt{3},\infty\right)$	2p

www.mateinfo.ro

3.	$2\cdot 9^x = 3^{x+1} + 5\cdot 3^x - 6$	2p
	$3^x = t \Rightarrow 2t^2 = 3t + 5t - 6 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$	1p
	$t_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$	1p
	$t_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 1$	1p
4.	Nr. cazuri posibile =12	1p
	$C_{11}^0 = C_{11}^{11} = 1$	1p
	$C_{11}^k \vdots 11 (\forall) k \in \{1,2,...,10\}$	1p
	Nr. cazuri favorabile =10	1p
	$P = \frac{5}{6}$	1p
5.	$AB = \sqrt{5}, AC = \sqrt{20}, BC = 5$	2p
	ΔABC dreptunghic în A (R.T.P)	1p
	M centrul cercului circumscris $\Rightarrow M$ mijlocul lui (BC)	1p
	$\Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	1p
6.	$m = 0 \Rightarrow \vec{u}$ şi $\vec{v}$ necoliniari	1p
	$m \neq 0 \Rightarrow \frac{m^2 - 1}{m} = 2$	2p
	$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A = 5$	1p
	$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$	2p
	$A^3 = \begin{pmatrix} -9 & 22 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}$.	2p
b)	$A^2 = 4A - 5I_2$ se verifică prin calcul direct	2p
	$A^{n+1} = 4A^n - 5A^{n-1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ se demonstrează prin inducţie matematică	3p
c)	Presupunem că $(\exists) m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^m = I_2 \Rightarrow \det A^m = 1 \Leftrightarrow$	2p
	$\Leftrightarrow (\det A)^m = 1 \Leftrightarrow 5^m = 1$ fals	3p
2. a)	$f = g \cdot h + r$	1p
	$h = X^4 - X^3 + X$	2p
	$r = -X^3 + 1$	2p
b)	Relaţiile lui Viette $\begin{cases} s = x_1 + x_2 = -1 \\ p = x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$	1p
	$x_1^2 + x_2^2 = s^2 - 2p = -1$	1p
	x_1 şi x_2 rădăcinile lui $g \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_1 + 1 = 0 / \cdot x_1 \\ x_2^2 + x_2 + 1 = 0 / \cdot x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^3 = -x_1^2 - x_1 \\ x_2^3 = -x_2^2 - x_2 \end{cases}$	2p
	$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 = 1 + 1 = 2$	1p

www.mateinfo.ro

c)	$f\left(x_1^2\right)+f\left(x_2^2\right)=\left(x_1^{16}+x_1^8+1\right)+\left(x_2^{16}+x_2^8+1\right)=$	2p
	$=\left(x_1+x_2\right)+\left(x_1^2+x_2^2\right)+2=$	2p
	$=-1-1+2=0\in\mathbb{N}$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$	2p
	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{3+x}+2}=\dfrac{1}{4}$	3p
b)	$f^2(x)=-2f'(x)\cdot\sqrt{3+x}\Leftrightarrow-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=\dfrac{1}{2\sqrt{3+x}}\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{3+x}}$	1p
	$\dfrac{1}{f(x)}=\sqrt{3+x}+2\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{3+x}}\Rightarrow$ relaţia adevărată	1p
	$f'(x)=-\dfrac{f^2(x)}{2\sqrt{3+x}}<0\ (\forall)x\in(-3,1)\cup(1,\infty), f_s(1)=f_d(1)=\dfrac{1}{4}$	2p
	$\Rightarrow f$ strict descrescătoare pe D	1p
c)	Ecuaţia tangentei la grafic într-un punct	1p
	$f(-2)=\dfrac{1}{3}, f'(-2)=-\dfrac{f^2(-2)}{2}=-\dfrac{1}{18}$	2p
	$\Rightarrow y-f(-2)=f'(-2)(x+2)\Leftrightarrow$	1p
	$\Leftrightarrow x+18y-4=0$	1p
2. a)	F derivabilă pe $\mathbb{R}$ (1)	1p
	$F'(x)=\left(e^{\cos x}+\sin x-x+1\right)'=-\sin x\cdot e^{\cos x}+\cos x-1=f(x)\ (\forall)x\in\mathbb{R}$ (2)	2p
	(1) şi (2) $\Rightarrow F$ primitivă pentru f	2p
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=F(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$	2p
	$=\left(e^{\cos x}+\sin x-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$	1p
	$=2-e-\dfrac{\pi}{2}$	2p
c)	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{f(x)-\cos x+1}{\left(\sin^2 x-1\right)e^{\cos x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx=$	2p
	$=\dfrac{1}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=$	2p
	$=\sqrt{2}-1$	1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 1

Prof: Badea Ion

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=\left[(1+i)^2\right]^{1006}+\left[(1-i)^2\right]^{1006}=(2i)^{1006}+(-2i)^{1006}=$	2p
	$=-2^{1006}-2^{1006}=-2^{1007}\in\mathbb{R}$	3p
2.	Fie $x_1=0,\ x_2=\sqrt{2},\ x_1\neq x_2$ (sau alte valori)	3p
	$f(x_1)=f(x_2)=1\Rightarrow f$ nu este injectivă	2p
3.	$\sqrt{x-1}=7-x$	
	$CE:\begin{cases}x-1\geq 0\\7-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\x\leq 7\end{cases}\Leftrightarrow x\in[1,7]$	2p
	$x-1=(7-x)^2\Leftrightarrow x^2-15x+50=0\Rightarrow x_1=5$ şi $x_2=10$	2p
	$\overset{CE}{\Rightarrow} S=\{5\}$	1p
4.	$2^{n-1}=128\Leftrightarrow n=8$	1p
	$T_{k+1}=C_8^k\left(\sqrt{a}\right)^{8-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^k=C_8^k a^{4-k}$	2p
	$4-k=2\Leftrightarrow k=2$	1p
	$T_3=C_8^k a^2=28a^2$	1p
5.	Ecuaţia bisectoarei a doua este $b: y=-x$	1p
	$\begin{cases}2x-y+5=0\\y=-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{5}{3}\\y=\frac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow d_1\cap b=\left\{A\left(-\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)\right\}$	2p
	$A\in d_2\Rightarrow m=-\frac{11}{5}$	2p
6.	notăm $\sin\alpha=x,\ \cos\alpha=y$ şi rezolvăm	1p
	Sistemul $\begin{cases}3x+2y+3=0\\x^2+y^2=1\end{cases}\Rightarrow(x,y)\in\left\{\left(-\frac{5}{13},-\frac{12}{13}\right);(-1,0)\right\}$	2p
	dar $x\neq\frac{k\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=-\frac{5}{13}\\\cos\alpha=-\frac{12}{13}\end{cases}\Rightarrow$	1p
	$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{120}{169}$	1p

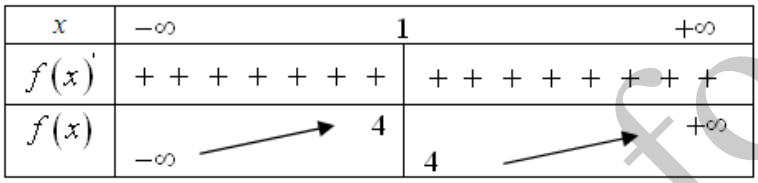
www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$	1p
	$\det A=3(a-1)$	2p
	$\det A=0\Leftrightarrow a=1$	1p
	$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3\neq 0\Rightarrow$ rang A=2	1p
b)	$a=1\Rightarrow$	
	$d_c=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & b\end{vmatrix}=-3(b+2)$	3p
	$d_c=0\Rightarrow b=-2$	2p
c)	$a=1,\ b=-2$	
	$\begin{cases}y+2z=1-\lambda\\ 2y+z=-1-2\lambda\\ x=\lambda\end{cases}$	1p
	$(x,y,z)\in\{(\lambda,-1-\lambda,1)/\lambda\in\mathbb{C}\}$	2p
	$\div x,y,z\Rightarrow\lambda+1=-2-2\lambda\Leftrightarrow\lambda=-1$	1p
	$\Rightarrow(-1,0,1)$	1p
2. a)	Definiția	1p
	$(-2x+3)(e-1)=0(\forall)x\in\mathbb{Z}$	2p
	$\Rightarrow e=1\in\mathbb{Z}$	2p
b)	Definiția	1p
	$\left.\begin{matrix}x`(-2x+3)=-3x+4\\ -2x+3\neq 0(\forall)x\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}\Rightarrow x`=\dfrac{-3x+4}{-2x+3}$	2p
	$x`\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow -2x+3\mid -3x+4\Leftrightarrow -2x+3\in D_1=\{\pm 1\}$	1p
	$\Rightarrow x\in\{1,2\}\Leftrightarrow \mathrm{U}(\mathbb{Z})=\{1,2\}$	1p
c)	$x*y=-2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\left(y-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{3}{2},(\forall)x,y\in\mathbb{Z}.$	1p
	$\underbrace{x*x*x*.....*x}_{de\ n\ ori}=(-2)^{n-1}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^n+\dfrac{3}{2},(\forall)n\in\mathbb{N}^*,n\geq 2$	1p
	Demonstrarea propoziției prin inducție atematică completă	2p
	$\underbrace{x*x*x*.....*x}_{de\ 2012\ ori}=(-2)^{2011}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^{2012}+\dfrac{3}{2}$	1p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$x_0=0\Rightarrow f(x_0)=1$	1p
	$f`(x_0)=f`(0)=1$	2p
	$t: y-1=x\Leftrightarrow x-y+1=0$	2p
b)	$f_3(x)=x^3+x^2+x+1;\ f_3`(x)=3x^2+2x+1$	1p
	f_3 strict crescătoare şi continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{1\}$	1p
		2p 1p
	$\text{Im } f_3=\mathbb{R}\setminus\{4\}$	
c)	$1+x+x^2+x^3+....+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}(\forall)\,x\neq 1$	1p
	Derivând se obţine $1+2x+3x^2+4x^3+....+nx^{n-1}=\dfrac{(n+1)x^n(x-1)-x^{n+1}+1}{(x-1)^2}$	2p
	pentru $x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow 1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\dfrac{4}{3^3}+....+\dfrac{n}{3^{n-1}}=\dfrac{9}{4}-\dfrac{2n+3}{4\cdot 3^{n-1}}$	2p
	$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{3^{k-1}}=\dfrac{9}{4}$	1p
2. a)	$I_0=\int_0^1\dfrac{dx}{(x+1)^2+(a+1)^2}=\dfrac{1}{a+1}\text{arctg}\dfrac{x+1}{a+1}\Big\vert_0^1=$	3p
	$=\dfrac{1}{a+1}\left(\text{arctg}\dfrac{2}{a+1}-\text{arctg}\dfrac{1}{a+1}\right)$	2p
b)	$x\in[0,1]\Rightarrow x^{n+1}\leq x^n\Rightarrow$	3p
	$\Rightarrow I_{n+1}\leq I_n\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*$	2p
c)	$I_{n+2}+2I_{n+1}+(a^2+2a+2)I_n=\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}$	1p
	$\dfrac{1}{n+1}\leq I_n+2I_n+(a^2+2a+2)I_n=(a^2+2a+5)I_n\Rightarrow I_n\geq\dfrac{1}{(n+1)(a^2+2a+5)}$	1p
	$I_n\leq\dfrac{1}{(n-1)(a^2+2a+5)}$	1p
	$\dfrac{1}{(n+1)(a^2+2a+5)}\leq I_n\leq\dfrac{1}{(n-1)(a^2+2a+5)}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot I_n=\dfrac{1}{a^2+2a+5}$	2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 2

Prof: Badea Ion

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z^2-\left(2\sin\frac{\pi}{12}\right)z+1=0$	1p
	$\Delta=-4\cos^2\frac{\pi}{12}\Rightarrow z_{1,2}=\sin\frac{\pi}{12}\pm i\cos\frac{\pi}{12}=\cos\frac{5\pi}{12}\pm i\sin\frac{5\pi}{12}$	1p
	$\lvert z_1\rvert=\lvert z_2\rvert=1,\ \overline{z_1}=z_2,\ z\cdot\overline{z}=1$	1p
	$z_i^{2012}+\frac{1}{z_i^{2012}}=z_i^{2012}+\overline{z_i}^{2012}=2\cos 2012\cdot\frac{5\pi}{12}=$	1p
	$=2\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$	1p
2.	$f(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$	1p
	Fie $y=\sqrt{3}-1,\ f(x)=\sqrt{3}-1\Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow\sqrt{3}x-1=\sqrt{3}-1\Leftrightarrow x=1\notin\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	1p
	$\Rightarrow f$ nu e surjectivă	1p
3.	$3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+2-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=0$	2p
	notăm $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=a\Rightarrow 3a^2-5a+2=0\Rightarrow a_1=\frac{2}{3}$ şi $a_2=1$	1p
	$\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\frac{2}{3}\Rightarrow x=1$	1p
	$\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1\Rightarrow x=0$	1p
4.	$A_5^5-A_4^4+A_5^4-A_4^3+A_5^3-A_4^2+A_5^2-A_4^1+4=$	3p
	$=260$	2p
5.	$G\in Ox\Rightarrow G(x,0)$	
	$C(x_C,y_C)\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{x_C+4}{3}\\0=\frac{y_C-2}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_C=3x-4\\y_C=2\end{cases}\Rightarrow C(3x-4,2)$	1p

www.mateinfo.ro

	$\Delta=\begin{vmatrix} 3x-4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}=12x-30$	
	$\frac{\lvert\Delta\rvert}{2}=3\Rightarrow\lvert 6x-15\rvert=3$	1p
	$6x-15=3\Rightarrow x=3\Rightarrow C(5,2)$	1p
	$6x-15=-3\Rightarrow x=2\Rightarrow C(2,2)$	1p
		1p
6.	Fie $T\in\mathbb{R}^*$ a.î. $f(x+T)=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow$	1p
	$\Rightarrow 2\cos\left[4(x+T)-\frac{\pi}{3}\right]=2\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)(\forall)x\in\mathbb{R}$	1p
	$4x-\frac{\pi}{3}=y\Rightarrow\cos(y+4T)=\cos y\,(\forall)\,y\in\mathbb{R}\Rightarrow$	1p
	$\mathcal{T}=\left\{k\frac{\pi}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}^*\right\}\Rightarrow T_0=\frac{\pi}{2}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\in \mathrm{M},\ X=\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\in \mathrm{M},\ a,x\neq 0$	1p
	$AX=\begin{pmatrix} ax & ay+bx & az+by+cx \\ 0 & ax & ay+bx \\ 0 & 0 & ax \end{pmatrix};\ ax\neq 0$	3p
	$\Rightarrow AX\in \mathrm{M},\ (\forall)A,X\in \mathrm{M}$	1p
b)	$\det A=a^3\neq 0\Rightarrow A$ inversabilă	1p
	$A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ cu $x=\frac{1}{a},\ y=-\frac{b}{a^2},\ z=\frac{b^2-ac}{a^3}$	4p
c)	$A=3I_3+B$ cu $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1p
	$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ B^k=0_3\ (\forall)k\geq 3$	1p
	$A^n=(3I_3+B)^n=C_n^0(3I_3)^n+C_n^1(3I_3)^{n-1}B+C_n^2(3I_3)^{n-2}B^2=$	1p

www.mateinfo.ro

	$=\begin{pmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} & n(2n+1)3^{n-2} \\ 0 & 3^n & 2n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$	2p
2. a)	$f=X^4+1=\left(X^4+2X^2+1\right)-2X^2=$	2p
	$=\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)$	3p
b)	$x_1+x_2+x_3+x_4=0$	1p
	Se adună toate coloanele la prima coloană $\Rightarrow$	
	$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1+x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & x_2 & 1+x_3 & x_4 \\ 1 & x_2 & x_3 & 1+x_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$	3p
	$=1$	1p
c)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)^2-2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\right)=$	2p
	$=-2a<0$	2p
	$\Rightarrow f$ nu are toate rădăcinile reale	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	F derivabilă pe $(0,\infty)$ și $f'(x)=\dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$	2p
	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$	1p
	f strict descrescătoare pe $(0,1]$	1p
	f strict crescătoare pe $[1,\infty)$	1p
b)	$\beta=f(\alpha)=\dfrac{1+\alpha}{\sqrt{\alpha}}$	1p
	$f'(\alpha)=\dfrac{3}{16}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha-1}{2\alpha\sqrt{\alpha}}=\dfrac{3}{16}$	1p
	$\Leftrightarrow 9\alpha^3-64\alpha^2+128\alpha-64=0\Leftrightarrow$	1p
	$(\alpha-4)\left(9\alpha^2-28\alpha+16\right)=0\Leftrightarrow$	1p
	$\left.\begin{matrix}\alpha_1=4\\ \alpha_{2,3}\notin\mathbb{N}^*\end{matrix}\right\}\Rightarrow\beta=\dfrac{5}{2}\Rightarrow \mathrm{M}\left(4,\dfrac{5}{2}\right)$	1p
c)	$f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\cdot x^{-\frac{2n+1}{2}}+(-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n}\cdot x^{-\frac{2n-1}{2}}=$	3p
	$=\dfrac{(-1)^n1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)(2n-1-x)}{2^n\cdot x^n\sqrt{x}},(\forall)n\in\mathbb{N}$	
	Demonstrarea propoziției prin inducție	2p

www.mateinfo.ro

2. a)	$I_2=\int_0^1 x^2\ln\left(1+x^2\right)dx=\frac{x^3}{3}\ln\left(1+x^2\right)\Big\|_0^1-\frac{2}{3}\int_0^1\frac{x^4}{x^2+1}dx=$	2p
	$=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{2}{3}\int_0^1\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$	1p
	$=\frac{4}{9}-\frac{\pi}{6}+\frac{\ln 2}{3}$	1p
b)	Demonstrarea relaţiei $\ln\left(1+x\right)\le x\ \ (\forall)x\ge 0$	1p
	$0\le\ln\left(1+x^n\right)\le x^n\ \ (\forall)x\in[0,1]$	1p
	$\Rightarrow 0\le x^n\ln\left(1+x^n\right)\le x^{2n}\ \ (\forall)x\in[0,1]$	1p
	$0\le I_n\le\frac{1}{2n+1},(\forall)n\in\mathbb{N}^*$	2p
c)	Criteriul cleştelui $\overset{b}{\Rightarrow}$	2p
	$\overset{b}{\Rightarrow}\lim_{n\to\infty}I_n=0$	3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 3

Prof: Badea Ion

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\Delta=4m^2-4m$	1p
	$\Delta<0\Leftrightarrow m\in(0,1),\overline{z_1}=z_2$	1p
	$\left\|z_1\right\|+\left\|z_2\right\|=1\Rightarrow\left\|z_1\right\|^2+\left\|z_2\right\|^2+2\left\|z_1\right\|\cdot\left\|z_2\right\|=1$	1p
	$\Leftrightarrow z_1\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}+2\left\|z_1z_2\right\|=1\Leftrightarrow 2z_1z_2+2\left\|z_1z_2\right\|=1$	1p
	$\Leftrightarrow 2m+2\left\|m\right\|=1\Leftrightarrow m=\frac{1}{4}$	1p
2.	$\Delta=25\Rightarrow V\left(\frac{1}{2},-\frac{25}{4}\right)\Rightarrow V_{\min f}=-\frac{25}{4}$	3p
	$V_{\min g}=f(0)=f(1)=-6$	2p
3.	$CE:\begin{cases}x^2-3>0\\x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(-3,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$	2p
	$x^2-3>x+3\Leftrightarrow x^2-x-6>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$	2p
	$\overset{CE}{\Rightarrow}x\in(-3,-2)\cup(3,+\infty)$	1p
4.	Numărul total de funcţii $=5^3=125$	2p

www.mateinfo.ro

	Numărul funcţiilor injective $= A_5^3 = 60$ Numărul funcţiilor neinjective $= 125 - 60 = 65$	2p 1p
5.	$B \in d_1 \Rightarrow B(x_B, x_B+1); C \in d_2 \Rightarrow C(x_C, 2x_C);$	1p
	B' - mijlocul lui $[AC]; B' \in d_1 \Rightarrow \begin{cases} x_{B'} = \frac{0+x_C}{2} \\ x_{B'}+1 = \frac{-1+2x_C}{2} \end{cases}$	1p
	$\Rightarrow x_C = 3 \Rightarrow C(3,6)$	1p
	C' - mijlocul lui $[AB]; C' \in d_2 \Rightarrow \begin{cases} x_{C'} = \frac{0+x_B}{2} \\ 2x_{C'} = \frac{-1+2x_B+1}{2} \end{cases}$	1p
	$\Rightarrow x_B = 0 \Rightarrow B(0,1)$	1p
6.	$\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$	1p
	$\arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$	1p
	$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$	1p
	$\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$	1p
	$S = \pi$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$XA = XX^n =$ $= X^{n+1} = X^n X = AX$	2p 3p
b)	$XA = AX \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$	1p
	$\Rightarrow X^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$	1p
	$X^n = A \Rightarrow a^n = 1;\ b^n = 2;\ c^n = 3$	1p
	n impar $\Rightarrow a = 1, b = \sqrt[n]{2}, c = \sqrt[n]{3} \Rightarrow \text{cardG}_n = 1$	1p
	n par $\Rightarrow a = \pm 1, b = \pm\sqrt[n]{2}, c = \pm\sqrt[n]{3} \Rightarrow \text{cardG}_n = 8$	1p

www.mateinfo.ro

c)	n, m impare $\Rightarrow p = n \cdot m$ impar $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[n]{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[n]{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[m]{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[m]{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[nm]{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[nm]{3} \end{pmatrix}$ În celelalte cazuri $\Rightarrow p = n \cdot m$ par	2p 3p
2. a)	$f(x) = (x-1)^2 c(x) + ax + b;\ a, b \in \mathbb{R}, f(x), c(x)$ funcţiile polinomiale asociate $f'(x) = 2(x-1)c(x) + (x-1)^2 c'(x) + a$ $f'(x) = 2012x^{2011} - 1003x^{1002} + 1$ $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} a + b = f(1) \\ a = f'(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a = 1010 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1010 \\ b = -1008 \end{cases}$ $r = 1010x - 1008$	1p 1p 1p 1p 1p
b)	Din relaţiile lui Viette $\Rightarrow \begin{cases} s_{2011} = -1 \\ s_{2012} = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow s = \frac{s_{2011}}{s_{2012}} = -1$	2p 3p
c)	$h = X^{2012} - X^{1003} + 1$ $X^2 - X + 1 = (X - \varepsilon_1)(X - \varepsilon_2)$ unde $\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ Dacă $\varepsilon \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \Rightarrow \varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$ şi $\varepsilon^3 = -1$ $h(\varepsilon) = \varepsilon^{2012} - \varepsilon^{1003} + 1 = \varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$ $\left.\begin{array}{l} h \vdots (X - \varepsilon) \\ \Rightarrow \varepsilon \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \\ \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \end{array}\right\} \Rightarrow h \vdots (X - \varepsilon_1)(X - \varepsilon_2) = X^2 - X + 1$	1p 1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	g derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $g'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow g''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$ $g''(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\begin{array}{\|c\|c\|} \hline x & -\infty \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad +\infty \\ \hline g''(x) & + + + + + + 0 - - - - 0 + + + + + + + \\ \hline \end{array}$ $\Rightarrow f$ strict convexă pe $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, strict concavă pe $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, strict convexă pe $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$	1p 1p 2p 1p

www.mateinfo.ro

b)	$g^{(n)}(x)=e^{-x^2}\cdot P_n(x)$, unde $P_n(x)$ este o funcţie polinomială de grad n	2p
	Demonstrarea propoziţiei prin inducţie	2p
	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{e^{x^2}}=0$	1p
c)	Fie $h(x)=f(x)-g(x)$, h continuă pe $[0,\infty)$, derivabilă pe $(0,\infty)$	2p
	$\left\|f(x)\right\|\le e^{-x^2}\ (\forall)x\ge 0\Rightarrow \left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=0\\ h(0)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow(\exists)c\in(0,\infty)$ a.î. $h'(c)=0$	2p
	$\Leftrightarrow(\exists)c\in(0,\infty)$ a.î. $f'(c)=-2c\cdot e^{-c^2}$	1p
2. a)	$g(x)\ge 0(x)\in[0,1]\Rightarrow A=\int_0^1 g(x)\,dx=$	2p
	$=\int_0^1 xe^{x^2}\,dx=\dfrac{1}{2}e^{x^2}\Big\|_0^1=$	2p
	$=\dfrac{e-1}{2}$	1p
b)	Fie F o primitivă a funcţiei $f\Rightarrow F$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x)=f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}$	1p
	$L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{F(\cos x)-F(0)}{F(\operatorname{ctg}x)-F(0)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$	1p
	$\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{F'(\cos x)\cdot(\cos x)'}{F'(\operatorname{ctg}x)\cdot(\operatorname{ctg}x)'}=$	1p
	$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(\cos x)\cdot(-\sin x)}{f(\operatorname{ctg}x)\cdot\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)}=$	1p
	$=1$	1p
c)	$2\sqrt{e}\le h(x)\le 1+e,(\forall)x\in[-1,0]$	3p
	$\Rightarrow 2\sqrt{e}\le\int_{-1}^{0}h(x)dx\le 1+e$	2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Băşcău Cornelia

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\lg 10^6 = 6, \sqrt{10^6} = 10^3, \sqrt[3]{10^6} = 100$ $\lg 10^6 + \sqrt{10^6} + \sqrt[3]{10^6} = 1106$	3p 2p
2.	$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow x \in \{5, -2\}$ $Gr_f \cap Ox = \{A(-2,0), (5,0)\}$	2p 3p
3.	$C.E. x > 0, \log_{27}^2 x^3 = (3\log_{27} x)^2$ $not \log_{27} x = t \Rightarrow 9t^2 + 9t - 4 = 0 \Rightarrow t \in \left\{\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right\}$ $\log_{27} x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} \Rightarrow x = 3 \in \mathbb{N}$ $\log_{27} x = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{27^{-4}} \Rightarrow x = 3^{-4} \notin \mathbb{N}$	1p 2p 1p 1p
4.	$T_{k+1} = C_9^k (3x)^{9-k} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k \Rightarrow x^{9-k} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = x^0$ $x^{9-k-\frac{1}{2}k} = x^0$ $k = 6 \Rightarrow T_{6+1} = C_9^6 3^3 = 2268$	2p 2p 1p
5.	$A(2,0), B(4,2), C(6,-4)$ $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_G = 4$ $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow y_G = \frac{-2}{3}$	1p 2p 2p

www.mateinfo.ro

6.	$6 \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \to \sin 6 < 0$	2p
	$7 \in \left(0, \frac{\pi}{2},\right) \to \sin 7 > 0$	1p
	$\sin 6 < \sin 7$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2p
	$f(-1) + f(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$	3p
b)	$f(2x) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$	2p
	$\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2p
	$x = \frac{1}{2}$	1p
c)	$f(x) \cdot f(x) = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$	1p
	$(f(x))^n = \begin{pmatrix} x^n & 0 \\ 0 & x^n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	1p
	$f(2) + \ldots + (f(2))^{2014} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 2^{2014} & 0 \\ 0 & 2^{2014} \end{pmatrix} =$	1p
	$\begin{pmatrix} 2 + \ldots + 2^{2014} & 0 \\ 0 & 2 + \ldots + 2^{2014} \end{pmatrix} =$	1p
	$\begin{pmatrix} 2^{2015} - 2 & 0 \\ 0 & 2^{2015} - 2 \end{pmatrix}$	1p
2. a)	elemente inversabile $\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{8}$	2p
	$\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{4} \cdot \hat{5} \cdot \hat{7} \cdot \hat{8} = \hat{8}$	3p
b)	$\hat{1} + \hat{2} + \ldots + \hat{9} = \hat{0}$	2p
	$\hat{1} + \hat{2} + \ldots + \widehat{2014} = \hat{1} + \hat{2} + \ldots + \hat{7} = \hat{1}$	3p

www.mateinfo.ro

c)	$\begin{cases}\hat{3}x+\hat{2}y=\hat{0}\\ \hat{4}x+\hat{5}y=\hat{1}\end{cases}\Big\vert(\ )\cdot\hat{2}\Rightarrow\begin{cases}\hat{6}x+\hat{4}y=\hat{0}\\ \hat{4}x+\hat{5}y=\hat{1}\end{cases}\Rightarrow$ $\hat{10}x+\hat{9}y=\hat{1}\Rightarrow x=\hat{1}$ $y=\hat{3}, S=\{(\hat{1},\hat{3})\}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$(x^{2014})'=2014x^{2013}$ $(2014^x)'=2014^x\ln 2014$ $f'(x)=2014x^{2013}+2014^x\ln 2014$	2p 2p 1p
b)	$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ $x_0=0, y_0=1-\ln 2014$ $f'(1)=\ln 2014$ $\ln 2014x-y+1-\ln 2014=0$	1p 1p 1p 2p
c)	$f''(x)=2014\cdot 2013x^{2012}+2014^x\ln^2 2014$ $x^{2012}\geq 0, 2014^x>0$ $f''(x)>0\Rightarrow fconv.pe\mathbb{R}$	2p 1p 2p
2. a)	$\int_2^4 f(x)dx=\int_2^4\frac{1}{x}dx+\int_2^4\frac{1}{x+2}dx=$ $=\left(\ln\lvert x\rvert+\ln\lvert x+2\rvert\right)\Big\vert_2^4=$ $=\ln 4-\ln 2+\ln 6-\ln 4=\ln\frac{6}{2}=\ln 3$	2p 2p 1p
b)	$Fprim.f\Rightarrow F'(x)=f(x),\forall x\in[1,\infty)$ $F''(x)=f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+2)^2}<0$ $F''(x)<0\Rightarrow Fconc.pe[1,\infty)$	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

c)	$V=\pi\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)^2dx=$ $\pi\left(\int_1^2 x^{-2}dx+\int_1^2(x+2)^{-2}dx+2\int_1^2\frac{1}{x(x+2)}dx\right)=$ $\pi\left(\frac{x^{-1}}{-1}\Big\|_1^2+\frac{(x+2)^{-1}}{-1}\Big\|_1^2+2\int_1^2\frac{1}{(x+1)^2-1}(x+1)'dx\right)=$ $\pi\left(1-2^{-1}+3^{-1}-4^{-1}+2\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{(x+1)-1}{(x+1)+1}\right\|_1^2\right)=\pi\left(\frac{7}{12}+\ln\frac{3}{2}\right)$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Băşcău Cornelia

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{-2i}{3-i}=\frac{-2i(3+i)}{10}=\frac{2-6i}{10}$ $\overline{\frac{-2i}{3-i}}=\frac{\overline{2-6i}}{10}=\frac{2+6i}{10}$	3p 2p
2.	$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right), a=1,b=0$ ec. axei de simetrie $x=\frac{-b}{2a}$ $x=0$	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

3.	$C.E. x \in [3,5]$ $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}=2 \Big\vert (\ )^2 \Rightarrow x-3+5-x+2\sqrt{(x-3)(5-x)}=4$ $\sqrt{(x-3)(5-x)}=1 \Big\vert (\ )^2 \Rightarrow -x^2+8x-16=0$ $x=4 \in [3,5]$	2p 2p 1p
4.	x – pret initial, $x-10\%x=\frac{9}{10}x$, pret dupa pima reducere $\frac{9}{10}x-10\%\frac{9}{10}x=\frac{81}{100}x$, pret final $\frac{81}{100}x=8100 \Rightarrow x=10000$	2p 2p 1p
5.	$\frac{MN}{\sin P}=\frac{NP}{\sin M}=2R$ $\frac{3}{1/2}=\frac{NP}{\sqrt{2}/2}=2R$ $NP=3\sqrt{2}, R=3$	2p 2p 1p
6.	$MN^2=40$ $NP^2=40$ $MN=NP \Rightarrow \Delta MNPis$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A_1(-1.1)$, $A_2(-2,2)$ A_1A_2: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_{A_1} & y_{A_1} & 1 \\ x_{A_2} & y_{A_2} & 1 \end{vmatrix}=0$ A_1A_2: $x = - y$	:2p 2p 1p
b)	$A_{AA2A3}=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert, \Delta=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_{A_2} & y_{A_2} & 1 \\ x_{A_3} & y_{A_3} & 1 \end{vmatrix}, A_2(-2,2), A_3(-3,3)$ $A_{AA2A3}=\frac{3}{2}$	3p 2p
c)	O(0,0), $A_n(-n,n)$, $A_{n+1}(-n-1,n+1)$	1p

www.mateinfo.ro

	$\begin{vmatrix} x_O & y_O & 1 \\ x_{A_n} & y_{A_n} & 1 \\ x_{A_{n+1}} & y_{A_{n+1}} & 1 \end{vmatrix} = 0$ Deci O, A_n, A_{n+1} coliniare	2p 2p
2. a)	$2014 \circ (-2014)=2014^{2014-2014}=$ $=2014^0=1$	5p
b)	$x^2 \circ 2x = 2014^{x^2+2x}$ $2014^{x^2+2x} = 2014^{-1}$ $x^2 + 2x = -1$ $(x+1)^2=0$ $x = -1$	3p 2p
c)	$x \circ y \circ z = 2014^{2014^{x+y}+z}$ $2014^{2014^{x+y}+z} = 2014^{z+2014}$ $2014^{x+y} + z = z + 2014, x + y = 1$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\left(\frac{(2x-1)}{(x^2-2x+1)}\right)' = \frac{(2x-1)'(x^2-2x+1)-(2x-1)(x^2-2x+1)'}{(x^2-2x+1)^2} =$ $\frac{2(x-1)^2-2(2x-1)(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(2x-2-4x+2)}{(x-1)^4} = \frac{-2x}{(x-1)^3}$	3p 2p

www.mateinfo.ro

b)	$f'(x)=\dfrac{-2x}{(x-1)^3}$	1p
	$f'(x)=0\Rightarrow\dfrac{-2x}{(x-1)^3}=0\Rightarrow x=0$	1p
	$f'(x)\geq 0, x\in[0,1), f'(x)<0, x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)$	1p
	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0,$ $x=1\min, f(1)=-1\Rightarrow f(x)\geq -1$	2p
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\infty, \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\infty\Rightarrow x=1$ *as.vert.la* $\pm\infty$	2p
	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$ *as.oriz.la* $\pm\infty$	2p
	Fct admite as. verticală, as. orizontală și nu are as oblică	1p
2. a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-1$	1p
	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-1$	1p
	$f(x)=-1$	1p
	$fcont.\Rightarrow fad.prim.$	2p
b)	$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(2x-1)dx+\int_{0}^{1}(3x^2+2x-1)dx=$	2p
	$=(x^2-x)\Big\vert_{-1}^{0}+(x^3+x^2-x)\Big\vert_{0}^{1}=$	2p
	$-2+1=-1$	1p
c)	$\int_{a}^{2} f(x)dx=\int_{a}^{2}(3x^2+2x-1)dx=x^3+x^2-x\Big\vert_{a}^{2}$	2p
	$10-a^3-a^2+a=9$	1p
	$a^3+a^2-a-1=0$	1p
	$a=1, a=-1, a\geq 0\Rightarrow a=1$	1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Băşcău Cornelia

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\dfrac{\cdot\cdot}{-}x-3, x, x+1 \Rightarrow x^2=(x-3)(x+1)$ $\dfrac{\cdot\cdot}{\ }$ $2x+3=0 \Rightarrow x=\dfrac{-3}{2}$	3p 2p
2.	$x+1+\sqrt{x-3}=x+1, x\in[3,\infty)$ $\sqrt{x-3}=0 \Rightarrow x=3\in[3,\infty)$	3p 2p
3.	$(f\circ f)(x)=f\left(f(x)\right)=3(3x-2)-2=9x-8$ $(f\circ f)(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow 9x-8-(3x-2)=0$ $x=1$	2p 2p 1p
4.	nr dreptelor=C_{10}^2 $\dfrac{10!}{2!(10-2)!}=45$	2p 3p
5.	$m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \Rightarrow m_{AB}=2 \Rightarrow m_{mediat.}=-\dfrac{1}{2}$ $Mmij.[AB] \Rightarrow M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}, \dfrac{y_A+y_B}{2}\right) \Rightarrow M\left(\dfrac{5}{2}, 4\right)$ $ec.mediat: y-y_M=m_{mediat.}(x-x_M) \Rightarrow 2x+4y-21=0$	1p 2p 2p
6.	$4\in\left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos 4<0$ $5\in\left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \cos 5>0$ $\cos 4<\cos 5$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

www.mateinfo.ro

1. a)	$A(n)=\begin{pmatrix} e^{\ln n} & \ln e \\ \ln 1 & \ln e \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A(3)=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{A}(4)=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A(3)A(4)=\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow tr\left(A(3)A(4)\right)=13$	3p 2p
b)	$A(3)=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow A^3(3)=\begin{pmatrix} 27 & 13 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A^3(3)=27$	3p 2p
c)	$A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A^2(1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A^3(1)=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A^n(1)=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n\in\mathbb{N}^*$ Etapa de verificare $n=1, A^1(1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Etapa de demonstratie$A^{n+1}(1)=\begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A^{n+1}(1)=A^n(1)A(1)=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{2014}(1)=\begin{pmatrix} 1 & 2014 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
2. a)	$g=0\Rightarrow x^2+\hat{3}x+\hat{2}=\hat{0}$ $x=\hat{3}$ $x=\hat{4}$	1p 2p 2p
b)	$g\,\vert\, f\Rightarrow f=g\cdot c\Rightarrow f(\hat{3})=\hat{0}, f(\hat{4})=\hat{0}$ $\hat{3}^4=\hat{1}, \hat{4}^4=1$ $\hat{1}+a=\hat{0}\Rightarrow a=\hat{4}$	2p 2p 1p
c)	$f=x^4+\hat{1}$ $\hat{a}^4\in\{\hat{0},\hat{1}\}, \forall a\in\mathbb{Z}_5[x]$ $f(\hat{a})\in\{\hat{1},\hat{2}\}, \forall a\in\mathbb{Z}_5[x]$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

www.mateinfo.ro

1. a)	$f'(x)=\left(\frac{x+3}{x-3}\right)'=\frac{x-3-x-3}{(x-3)^2}=\frac{-6}{(x-3)^2}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=\frac{-6}{9}$	3p 2p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^x\overset{1^\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x-3}\right)^x=$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{6}\cdot\frac{6}{x-3}x}=e^6$	3p 2p
c)	$f'(x)=\frac{-6}{(x-3)^2}<0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}\Rightarrow f$strict descrescatoare pe $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1,\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}}f(x)=-\infty,\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}f(x)=\infty$ Daca $m=$1ecuatia nu are solutii;daca $m\in(-\infty,1)$ecuatia are o solutie $x_0\in(-\infty,3)$; daca $m\in(1,\infty)$ecuatia are o solutie $x_0\in(3,\infty)$	1p 2p 2p
2. a)	$I_n=\int_e^{e^2}e^{\ln x^n}\ln x dx=\int_e^{e^2}\mathrm{x}^n\ln x dx$ $I_1=\int_e^{e^2}\mathrm{x}\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\frac{\mathrm{x}^2}{2}\frac{1}{x}dx=$ $e^4-\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big\vert_e^{e^2}=\frac{3e^4-e^2}{4}$	2p 2p 1p
b)	$I_n=\int_e^{e^2}\mathrm{x}^n\ln x dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\Big\vert_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\frac{\mathrm{x}^{n+1}}{n+1}\frac{1}{x}dx=$ $\frac{2e^{2n+2}-e^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\Big\vert_e^{e^2}=$ $\frac{(n+1)\left(2e^{2n+2}-e^{n+1}\right)-\left(e^{2n+2}-e^{n+1}\right)}{(n+1)^2}=\frac{(2n+1)e^{2n+2}-ne^{n+1}}{(n+1)^2}$	1p 1p 1p 2p
c)	$I_0=e^2,I_1=\frac{3e^4-e^2}{4},I_2=\frac{5e^6-2e^3}{9}$ $5e^2e^2+20e^2\frac{3e^4-e^2}{4}-6e^3=27\frac{5e^6-2e^3}{9}$ $5e^4+15e^6-5e^4-6e^3=15e^6-6e^3$	3p 1p 1p

www.mateinfo.ro

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Brabeceanu Silvia

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Scriem media geometrică a celor trei numere $x^2+3x=\sqrt{2\cdot 8}$ $x^2+3x-4=0$ Rezolvarea ecuaţiei $\Rightarrow x_1=1,\ x_2=-4$	1p 1p 3p
2.	Vârful parabolei $V\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$ Condiţia $\frac{-\Delta}{4a}=3m+1$ $24m=15\Rightarrow m=\frac{5}{8}$ Finalizare $V\left(\frac{3}{4},\frac{23}{8}\right)$	1p 1p 2p 1p
3.	Ecuaţia $x^2+9=5x+15\Rightarrow x^2-5x-6=0$ Soluţiile $x_1=6,\ x_2=-1$ Verificare	1p 2p 2p
4.	$\overline{ab}$ - impar $\Rightarrow b\in\{1,7\}$ Pentru fiecare b impar sunt trei variante de alegere a lui $a\Rightarrow 2\cdot 3=6$ variante Pentru $b=1\Rightarrow 21,\ 41,\ 71$ Pentru $b=7\Rightarrow 17,\ 27,\ 47$	1p 2p 1p 1p

www.mateinfo.ro

5.	$\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \frac{-3}{-1} = \frac{a-2}{4}$ Rezolvarea ecuaţiei cu soluţia $a = 14$	2p 3p
6.	$2\cos x = \sqrt{3}$ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Soluţia $x = \frac{\pi}{6}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $\det(A(1)) = 2 - 1 = 1$	2p 3p
b)	$A(m) \cdot A(-m) = \begin{pmatrix} 1-m & 3 & 1-m \\ m & m & m \\ -m-m^2 & 3m & m-m^2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1-m & 3 & 1-m \\ m & m & m \\ -m-m^2 & 3m & m-m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m = 1$	3p 2p
c)	$A(1) + A(2) + \cdots A(10) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ $A(1) + A(2) + \cdots A(10) = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ \frac{(1+10)10}{2} & 0 & 0 \\ \frac{(1+10)10}{2} & 20 & \frac{(1+10)10}{2} \end{pmatrix}$	2p 3p
2. a)	$3 * 4 = 24 - 18 - 24 + 21 = 3$ $(3 * 4) * (-3) = 3 * (-3) = 3$	2p 3p

www.mateinfo.ro

b)	$x*y=2xy-6x-6y+21=2xy-6x-6y+18+3$ $x*y=2xy-6x-6y+18+3=2x(y-3)-6(y-3)+3$ $x*y=2x(y-3)-6(y-3)+3=2(x-3)(y-3)+3$	2p 2p 1p
c)	$x*x=2(x-3)^2+3$ $(x*x)*x=4(x-3)^3+3$ $4(x-3)^3+3=7\Rightarrow(x-3)^3=1\Rightarrow x=4$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)'=\frac{2(x-1)-(2x-1)}{(x-1)^2}$ $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2},\ x\in(1,\infty)$	2p 3p
b)	$\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ $f'(2)=-1$ $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$	2p 2p 1p
c)	Ecuaţia tangentei : $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ $y_0=f(2)=3$ şi $f'(2)=-1$ tg: $x+y-5=0$	1p 2p 2p
2. a)	f este o primitivă a lui $g\Leftrightarrow f'(x)=g(x),\ \forall x\in(0,\infty)$ $f'(x)=(2\ln x-3x)'=\frac{2-3x}{x}=g(x)$	2p 3p
b)	$\int f(x)dx=\int(2\ln x-3x)dx=2\int\ln xdx-3\int xdx$ $\int\ln xdx=x\cdot\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot xdx=x\cdot\ln x-x$	1p 2p

www.mateinfo.ro

	$\int f(x)dx=\frac{4x\cdot\ln x-4x-3x^2}{2}+c$	2p
c)	$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx=2\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx-3\int_1^e dx$	2p
	$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\ln^2 x\Big\vert_1^e-\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx\Rightarrow\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}\left(\ln^2 e-\ln^2 1\right)=\frac{1}{2}$	3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Brabeceanu Silvia

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=\frac{3-2i}{1+i}+\frac{2+3i}{2-i}=\frac{5-25i+2+16i}{10}$	3p
	$z=\frac{7}{10}-\frac{9}{10}i\Rightarrow\bar{z}=\frac{7}{10}+\frac{9}{10}i$	2p
2.	$f(1)+f(2)+\cdots+f(8)=\frac{2\left(2^8-1\right)}{2-1}+\frac{(1+8)8}{2}$	3p
	$f(1)+f(2)+\cdots+f(8)=512+34=546$	2p
3.	Baza subunitară $\Rightarrow 7+5x<x^2+1$	1p
	$x^2-5x-6>0$	1p
		3p

www.mateinfo.ro

	$x\in(-\infty,-1)\cup(6,\infty)$ şi $x\in\left[\frac{-5}{7},\infty\right)\Rightarrow x\in(6,\infty)$	
4.	Pentru $n\in\{1,4,5,6,7\}$ inegalitatea este verificată Probabilitatea $=\frac{cazuri\ favorabile}{cazuri\ posibile}=\frac{5}{7}$	4p 1p
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-2\vec{i}+2\vec{j}$ $2\overrightarrow{AC}=-4\vec{i}+4\vec{j}$	2p 2p 1p
6.	$\sin 75^0+\cos 75^0-a=\sin 75^0-\sin 15^0+\cos 75^0+\cos 15^0$ $\sin 75^0-\sin 15^0=2\sin 30^0\cos 45^0$ $\cos 75^0+\cos 15^0=2\cos 45^0\cos 30^0$ $\sin 75^0+\cos 75^0-a=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$	1p 1p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}1&-3&2\\1&-3&2\\1&-3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-3&2\\1&-3&2\\1&-3&2\end{pmatrix}=O_3$	5p
b)	$A^n=O_3,\ n\geq 2$ $M=2\cdot A+2^2\cdot A^2+\cdots+2^{2014}\cdot A^{2014}=2A=2\begin{pmatrix}1&-3&2\\1&-3&2\\1&-3&2\end{pmatrix}$	3p 2p
c)	$X(m)\cdot X(n)=(mA+I_3)(nA+I_3)=mA+nA+I_3=(m+n)A+I_3=X(m+n)$ $X(m)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(X(m))\neq 0$ $\det(X(m))=m\begin{vmatrix}1&-3&2\\1&-3&2\\1&-3&2\end{vmatrix}+I_3=\begin{vmatrix}m+1&-3m&2m\\m&-3m+1&2m\\m&-3m&2m+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}m+1&-3m&1\\m&-3m+1&1\\m&-3m&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}m+1&-3m&1\\-1&1&0\\-1&0&0\end{vmatrix}=1$	1p 1p 3p
2.	$f(1)=-a+3$	2p

www.mateinfo.ro

a)	$f(-1)=-a-5$ $f(1)-f(-1)=-a+3+a+5=8$	2p 1p
b)	$f(-1)=3$ $f(1)=-a+3$ $f(1)-f(-1)=8\Rightarrow 3-a-3=8\Rightarrow a=-8$ $f(1)=-a+3\Rightarrow f(1)=11\Rightarrow$ restul este 11	1p 1p 2p 1p
c)	Relaţiile lui Viete $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=a^2-6$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=10\Rightarrow a^2-6=10\Rightarrow a=\pm 4$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$x=0$ asimptotă verticală spre $+\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}=\infty\Rightarrow \nexists$ asimptotă orizontală $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0\Rightarrow \nexists$ asimptotă oblică	1p 2p 2p
b)	Derivata de ordin I - $F'(x)$ Derivata de ordin II - $F''(x)$ Prin identificare din $F''(x)=f(x)\Rightarrow a=\dfrac{2}{3},\ b=-2$	1p 2p 2p
c)	$f'(x)=\dfrac{x+1}{2x\sqrt{x}}$ $f''(x)=\dfrac{-x-3}{4x^2\sqrt{x}}$ $x^2\cdot f''(x)+x\cdot f'(x)=\sqrt{x}-1\Rightarrow 4\sqrt{x}=3x+1\Rightarrow x_1=1,\ x_2=\dfrac{1}{9}$	1p 1p 3p

www.mateinfo.ro

2. a)	$I_1=\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx=1-\ln 2$ $I_2=\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(1+x)\right]\Big\|_0^1=-\frac{1}{2}+\ln 2$	2p 3p
b)	$I_{n+1}+I_n=\int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n}{x+1}dx$ $I_{n+1}+I_n=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\|_0^1=\frac{1}{n+1}$	3p 2p
c)	$nI_n=n\int_0^1 x^{n-1}\frac{x^n}{x+1}dx=n\left[\frac{x^n}{n}\cdot\frac{x}{x+1}\Big\|_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1\frac{x^n}{(x+1)^2}dx\right]$ $nI_n=n\cdot\frac{1}{2n}-\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}dx=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}dx$	4p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Brabeceanu Silvia

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt{16-6\sqrt{7}}=\sqrt{(3-\sqrt{7})^2}=3-\sqrt{7}$ $\sqrt{16+6\sqrt{7}}=\sqrt{(3+\sqrt{7})^2}=3+\sqrt{7}$	2p 2p

www.mateinfo.ro

	$n=\sqrt{16-6\sqrt{7}}+\sqrt{16+6\sqrt{7}}=3-\sqrt{7}+3-\sqrt{7}=6\in\mathbb{N}$	1p
2.	$f\left(g\left(1\right)\right)=7$ $g\left(f\left(1\right)\right)=1$ $f\left(g\left(1\right)\right)-g\left(f\left(1\right)\right)=7-1=6$	2p 2p 1p
3.	$2^{2x-1}+2^{2x-3}-2\cdot 2^{2x-5}=\frac{2^{2x}}{2}+\frac{2^{2x}}{8}-2\cdot\frac{2^{2x}}{32}$ $\frac{9\cdot 2^{2x}}{16}=9\Rightarrow 2^{2x}=16\Rightarrow x=2$	3p 2p
4.	x – preţul mărfii $\frac{16}{100}\cdot x=256$ $x=1600$	1p 2p 2p
5.	$d_1: y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\Rightarrow m_1=\frac{3}{2}$ $d_2: y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}\Rightarrow m_2=-\frac{2}{3}$ $\cos\alpha=\frac{1+m_1\cdot m_2}{\sqrt{1+m_1^2}\cdot\sqrt{1+m_2^2}}=\frac{0}{\sqrt{1+m_1^2}\cdot\sqrt{1+m_2^2}}=0$ $d_1\perp d_2$	1p 1p 2p 1p
6.	$M=\frac{\pi}{6}$, $N=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\triangle MNP$ - dreptunghic în P MN – ipotenuza $\Rightarrow R=\frac{MN}{2}=2$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det\left(M\right)=\begin{vmatrix} m & 2 & -3 \\ m & m-3 & 3m-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2m^2+2m-11$	5p

www.mateinfo.ro

b)	ABC este triunghi $\Leftrightarrow A,B,C$ nu sunt coliniare	1p
	$-2m^2+2m-11=0$	2p
	$\Delta=-84\Rightarrow m\notin\mathbb{R}\Rightarrow \det(ABC)\neq 0$	1p
	finalizare	1p
c)	Pentru $m=4\Rightarrow \det(ABC)=-35$	3p
	$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\lvert\det(ABC)\rvert=\frac{1}{2}\cdot\lvert-35\rvert=\frac{35}{2}$	2p
2. a)	$f=X^4-14X^2+48=X^4-14X^2+49-1$	2p
	$X^4-14X^2+49=\left(X^2-7\right)^2$	2p
	$f=\left(X^2-7\right)^2-1$	1p
b)	$f(x)=0\Rightarrow\left(x^2-7\right)^2-1=\left(x^2-8\right)\left(x^2-6\right)=0$	1p
	$\left(x^2-8\right)=0\Rightarrow x_1=2\sqrt{2},\ x_2=-2\sqrt{2}$ nu sunt numere întregi	2p
	$\left(x^2-6\right)=0\Rightarrow x_3=\sqrt{6},\ x_4=-\sqrt{6}$ nu sunt numere întregi	2p
c)	Rădăcinile reale ale polinomului sunt cele găsite la pct. b).	2p
	$f=\left(X-2\sqrt{2}\right)\left(X+2\sqrt{2}\right)\left(X-\sqrt{6}\right)\left(X+\sqrt{6}\right)$	3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+x+3}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+3}}\cdot\left(x^2+x+3\right)'$	3p
	$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+3}}$	2p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+3}=\infty\Rightarrow\nexists$ asimptotă orizontală	1p
		1p

www.mateinfo.ro

	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+3}}{x}=1$ $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}-x\right)=\dfrac{1}{2}$ $y=x+\dfrac{1}{2}$ asimptotă oblică	2p 1p
c)	$f'(x)=0\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow x=\dfrac{-1}{2}$ Tabloul de valori Intervale de monotonie $\left(-\infty,\dfrac{-1}{2}\right)$ şi $\left(\dfrac{-1}{2},\infty\right)$	1p 2p 2p
2. a)	$\int_0^1 (x+3)f(x)dx=\int_0^1\left[(x+3)^2+1\right]dx$ $\int_0^1\left[(x+3)^2+1\right]dx=\dfrac{x^3}{3}+6\dfrac{x^2}{2}+10x\Big\vert_0^1$ $\int_0^1 (x+3)f(x)dx=\dfrac{40}{3}$	2p 2p 1p
b)	F este o primitivă a lui $f\Leftrightarrow F'(x)=f(x),\ \forall x\in(-3,\infty)$ $F'(x)=\left[\dfrac{x^2}{2}+3x+\ln(x+3)\right]'$ $F'(x)=x+3+\dfrac{1}{x+3}=f(x)$	1p 2p 2p
c)	$\int_{-2}^0 F(x)\cdot f(x)dx=\int_{-2}^0 F(x)\cdot F'(x)dx=\dfrac{F^2(x)}{2}\Big\vert_{-2}^0$ $\int_{-2}^0 F(x)\cdot f(x)dx=\dfrac{\ln^2 x}{2}-8$	3p 2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Ciocănaru Viorica

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Re $z = 4$, Im $z = 3i$, deci $z = 4+ 3i$.	3p
	Conjugatul numărului complex $\bar{z} = 4 - 3i$.	2p
2.	$f(x)=g(x) \leftrightarrow x^2+3x-8=-x-3$.	1p
	Obţine ecuaţia $x^2+4x-5=0$, calculează $\Delta = 4^2-4(-5)=36$ şi obţine $x_1 = 1$, $x_2 = -5$.	2p
	Calculează $f(1) = -4$, $f(-5) = 2$ şi obţine $G_f \cap G_g = \{A, B\}$, A(1, -4), B(-5, 2).	2p
3.	$(\sqrt[3]{2x+1})^3 = (x+1)^3$.	1p
	$2x+1 = x^3+3x^2+3x+1 \leftrightarrow x^3+3x^2+x=0$	
	$x(x^2+3x+1)=0$ de unde $x_1=0$, $x_{2,3}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\Delta = b^2-4ac = 5$, $x_{2,3}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, deci	2p
	$S = \{0, \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\}$.	2p
4.	Numărul numerelor naturale de două cifre este 90.	2p
	Numerele divizibile cu 6 din mulţimea numerelor naturale de două cifre sunt: 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96; numărul lor este 15.	1p
	$p = \frac{nr.cazurifavorabile}{nr.cazuriposibile} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$	2p
5.	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \vec{i}-2\vec{j}$.	2p
	$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC} = 3\vec{i}+2\vec{j}+2(\vec{i}-2\vec{j}) = 5\vec{i}-2\vec{j}$.	3p

www.mateinfo.ro

6.	Teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$	2p
	$AB=c=8,\ sin\ C=sin\ \frac{\pi}{3}$.	1p
	După înlocuiri şi calcule $\frac{c}{\sin C}=2R,\ \frac{8}{\sin\frac{\pi}{3}}=8\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ R=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A_0=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\3&1&-3\end{pmatrix}$, $A_2^t=\begin{pmatrix}1&6&7\\3&3&1\\0&-2&-3\end{pmatrix}$	2p
	$A_0+A_2^t=\begin{pmatrix}2&7&5\\3&4&-1\\3&-1&-6\end{pmatrix}$, $Tr\,(A_0+A_2^t)=2+4-6=0$	3p
b)	$CA_0=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&-1\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\3&1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-2&6\\-3&0&1\\2&3&-6\end{pmatrix}$. Primele două puncte se acordă pentru calculul elementelor primei linii iar celelalte trei puncte se acordă pentru calculul elementelor celorlalte două linii.	2p 3p
c)	$A_p-B_p=\begin{pmatrix}0&1&-2\\2p&1&0\\p+3&1&1\end{pmatrix}$	1p
	$\sum_{p=1}^{n}(A_p-B_p)=\begin{pmatrix}0&1&-2\\2\cdot1&1&0\\1+3&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&-2\\2\cdot2&1&0\\2+3&1&1\end{pmatrix}+....+\begin{pmatrix}0&1&-2\\2\cdot n&1&0\\n+3&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&n&-2n\\2\sum_{p=1}^{n}p&n&0\\\sum_{p=1}^{n}p+3n&n&n\end{pmatrix}$	2p
	cu $\sum_{p=1}^{n}p=\frac{n(n+1)}{2}$, deci $\sum_{p=1}^{n}(A_p-B_p)=\begin{pmatrix}0&n&-2n\\n(n+1)&n&0\\n(n+7)/2&n&n\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}0&1&-2\\n+1&1&0\\(n+7)/2&1&1\end{pmatrix}$	2p

www.mateinfo.ro

2.	$f(-2) = (-2)^3 + a(-2)^2 + (-2) + a$	1p
a)	$f(-2) = -8 + 4a - 2 + a = 5a - 10$.	3p
	$f(-2) = 5(a - 2)$.	1p
b)	Pentru $a = 2$, polinomul $f = X^3 + 2X^2 + X + 2$.	1p
	După gruparea termenilor și scoterea factorului comun, f devine: $(X^2 + 1)(X + 2)$.	2p
	Rădăcinile polinomului sunt $x_{1,2} = \pm i$, $x_3 = -2 \Rightarrow S = \{-2, \pm i\}$.	2p
c)	Dacă x_k este o rădăcină a polinomului f, $x_k^3 = -a x_k^2 - x_k - a$, unde $k \in \{1, 2, 3\}$.	2p
	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3) - 3a$.	2p
	Din relaţiile lui Viète $(x_1 + x_2 + x_3 = -a,\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1,\ x_1x_2x_3 = -a)$ $\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = a^2 - 2$.	
	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -a(a^2 - 2) + a - 3a = -a^3$.	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	Formula: $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $u > 0$.	2p
a)	$f'(x) = (\sqrt{x^2+4})' = \dfrac{(x^2+4)'}{2\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.	2p
	$f'(-2) = \dfrac{-2}{\sqrt{(-2)^2+4}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.	1p
b)	Ecuația asimptotei oblice este $y = mx + n$.	1p
	$m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x} = \pm 1 \Rightarrow\ n_1 = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4} - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x} = 0,$	3p
	$n_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4} + x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}-x} = 0.$	
	$y = \pm x$ la $\pm\infty$.	1p
c)	$f'' > 0 \Rightarrow f$ convexă, $f'' < 0 \Rightarrow f$ concavă.	1p

www.mateinfo.ro

	Formula $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	1p
	Din subpunctul a) $\Rightarrow f''(x) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+4}})' = \frac{\sqrt{x^2+4} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}$. După calcule se obţine	3p
	$f''(x) = \frac{4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} > 0 \Rightarrow f$ convexă.	
2. a)	$\int f_1(x)dx = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -(x+1)e^{-x} + c$.	2p
	$\int_{\ln 2}^{\ln 3} xe^{-x}dx = [-(x+1)e^{-x}]\Big|_{\ln 2}^{\ln 3} = -(\ln 3+1)e^{-\ln 3} + (\ln 2+1)e^{-\ln 2} = -(\ln 3+1)\frac{1}{3} + (\ln 2+1)\frac{1}{2}$.	2p
	$\int_{\ln 2}^{\ln 3} xe^{-x}dx = \ln\sqrt{2} + \frac{1}{2} - (\ln\sqrt[3]{3} + \frac{1}{3}) = \ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{6}$.	1p
b)	$I_n = \int f_n(x)dx = \int x^n e^{-x}dx$.	1p
	$I_n = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}dx$.	1p
	$I_{n-1} = \int x^{n-1}e^{-x}dx \Rightarrow I_n = -x^n e^{-x} + n\, I_{n-1}, n \in \mathbf{N}^*$	1p
	Pentru $n = 2$ $I_2 = -x^2e^{-x} + 2\, I_1$, din punctul a) $I_1 = \int f_1(x)dx = -xe^{-x} - e^{-x} \Rightarrow$	2p
	$I_2 = -x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) = -(x^2+2x+2)e^{-x}$.	
c)	$L_n = \lim_{x\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt = \lim_{x\to\infty}[-x^n e^{-x} + n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt] = n\, L_{n-1}$.	2p
	$L_n = n\, L_{n-1} = n(n-1)\, L_{n-2} = n(n-1)(n-2)\, L_{n-3} = ... = n!\, L_1$	1p
	$L_1 = \lim_{x\to\infty}\int_0^x te^{-t}dt = \lim_{x\to\infty}(-(t+1)e^{-t}\Big|_0^x) = \lim_{x\to\infty}(-\frac{x+1}{e^x} + 1) = 1 \Rightarrow L_n = n!$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

www.mateinfo.ro

Varianta 2

Prof: Ciocănaru Viorica

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(x+1)^2 = 3\cdot 12 \leftrightarrow x+1 = \pm 6 \Rightarrow x = 5$ deoarece termenii progresiei sunt pozitivi. Termenii sunt 3, 6, 12 şi suma lor este 21.	3p 2p
2.	Coordonatele vârfului $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$. $\frac{-b}{2a} = 1 \leftrightarrow -b = 2a$, $\frac{-\Delta}{4a} = 2 \leftrightarrow -b^2 + 4ac = 8a$ de unde după înlocuiri $\Rightarrow -b^2 + 2b = 0 \leftrightarrow b(2 - b) = 0 \Rightarrow b_1 = 0,\ b_2 = 2$. Se reţine $b = 2$ deoarece b este nenul şi atunci $a = -1$.	1p 3p 1p
3.	$2^{\sqrt{x^2-4}} = 2^{x-2} \leftrightarrow \sqrt{x^2-4} = x-2$. Condiţii de existenţă: $x^2 - 4 \geq 0,\ x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. $(\sqrt{x^2-4})^2 = (x-2)^2 \leftrightarrow x^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 \leftrightarrow 4x = 8 \leftrightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$.	1p 2p 2p
4.	$\overline{ab}$ par $\Rightarrow b \in \{4, 6\}$. Numerele care îndeplinesc condiţia: 44, 46, 54, 56, 64, 66, 74, 76.	2p 3p
5.	Distanţa de la punctul M la dreapta d se calculează după relaţia: $\frac{\lvert ax_0 + by_0 + c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$. $y = \frac{-4x+1}{7} \leftrightarrow 4x + 7y - 1 = 0$, ecuaţia dreptei. $d(M, d) = \frac{\lvert 4(-2) + 7(-1) - 1\rvert}{\sqrt{4^2+7^2}} = \frac{\lvert -16\rvert}{\sqrt{65}} = \frac{16\sqrt{65}}{65}$.	2p 1p 2p
6.	Formula: $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$. $E(a) = \sin a - \sin 5a = 2\sin\frac{a-5a}{2}\cos\frac{a+5a}{2} = 2\sin(-2a)\cos 3a = -2\sin 2a\cos 3a$.	1p 2p

www.mateinfo.ro

	$E(\frac{\pi}{6}) = -2 \sin 2\frac{\pi}{6} \cos 3\frac{\pi}{6} = -2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2} = 0.$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	2p
	$A^2 = \begin{pmatrix} 3p^2 & 3p^2 & 3p^2 \\ 3p^2 & 3p^2 & 3p^2 \\ 3p^2 & 3p^2 & 3p^2 \end{pmatrix}$	2p
	$A^2 = 3p\begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix} = 3pA.$	1p
b)	$\det(A - I_3) = \begin{vmatrix} p-1 & p & p \\ p & p-1 & p \\ p & p & p-1 \end{vmatrix} = (p-1)^3 + 2p^3 - 3p^2(p-1)$	3p
	$\det(A + I_3) = \begin{vmatrix} p+1 & p & p \\ p & p+1 & p \\ p & p & p+1 \end{vmatrix} = (p+1)^3 + 2p^3 - 3p^2(p+1)$	2p
	$\det(A - I_3) = 3p - 1$, $\det(A + I_3) = 3p + 1 \Rightarrow \det(A - I_3)\det(A + I_3) = (3p)^2 - 1$	
c)	$n = 1 \Rightarrow A = (3p)^{1-1} \cdot A$	1p
	Prin inducţie, se presupune $A^n = (3p)^{n-1} \cdot A$ adevărată şi se calculează $A^{n+1} = (3p)^{n-1} \cdot A^2$ din punctul a) $\Rightarrow A^{n+1} = (3p)^{n-1} \cdot 3p \cdot A = (3p)^n \cdot A$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall p \in \mathbf{R}$.	2p
	Pentru $n = 2014$, $A^n = (3p)^{n-1} \cdot A$ se obţine $A^{2014} = (3p)^{2013} \cdot A$	2p
2.	$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 - 2(-\sqrt{2})^2 - (-\sqrt{2}) + m = -2\sqrt{2} - 4 + \sqrt{2} + m = m - (4 + \sqrt{2})$.	2p
a)	$f(-\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow m - (4 + \sqrt{2}) = 0 \leftrightarrow m = 4 + \sqrt{2}$.	3p
b)	$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0 \leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 5 - 1 = 0 \leftrightarrow (x^4 - 1) - 5x^2(x - 1) + 5(x - 1) = 0 \leftrightarrow$	2p
	$(x - 1)[(x^2 + 1)(x + 1) - 5x^2 + 5] = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$ şi	2p
	$(x^2 + 1)(x + 1) - 5x^2 + 5 = 0 \leftrightarrow (x + 1)[x^2 + 1 - 5(x - 1)] = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$ şi $x^2 - 5x - 6 = 0$	

www.mateinfo.ro

	Deci $x_1 = 1, x_2 = -1, x_{3,4} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow S = \{\pm 1, 2, 3\}$.	1p
c)	$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) = (1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + m) + [(-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + m] + (2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 + m)(3^3 - 2 \cdot 3^2 - 3 + m)$.	2p
	$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) = (m - 2) + (m - 2) + (m - 2) + ((m + 6) = 4m$.	3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\frac{x+3}{x-3} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty) \Rightarrow D = \mathbf{R} - [-3, 3]$.	2p
	$f(-x) = \ln\frac{-x+3}{-x-3} = \ln\frac{x-3}{x+3} = -\ln\frac{x+3}{x-3} = -f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R} - [-3, 3]$ deci f impară.	2p
	$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} \ln\frac{x+3}{x-3} = +\infty \Rightarrow x = 3$ ecuaţia asimptotei verticale la dreapta lui 3 şi analog $x = -3$ ecuaţia asimptotei verticale la stânga lui – 3.	1p
b)	Formulele $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ şi $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.	2p
	$f'(x) = (\ln\frac{x+3}{x-3})' = \frac{(\frac{x+3}{x-3})'}{\frac{x+3}{x-3}} = \frac{x-3-(x+3)}{(x-3)^2} \cdot \frac{x-3}{x+3} = \frac{-6}{x^2-9}$.	3p
c)	$L = \lim\limits_{x \to \infty} xf(x) = \lim\limits_{x \to \infty} x \ln\frac{x+3}{x-3}$, $\lim\limits_{x \to \infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \ln\frac{x+3}{x-3} = 0 \Rightarrow$ nedeterminarea $+\infty \cdot 0$	2p
	$L = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln\frac{x+3}{x-3}}{\frac{1}{x}} \Rightarrow$ nedeterminarea $\frac{0}{0}$	1p
	Cu regula lui l'Hospital şi folosind rezultatul de la b) $\Rightarrow$	2p
	$L = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{(\ln\frac{x+1}{x-1})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{-6}{x^2-9}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{6x^2}{x^2-9} = 6$.	

www.mateinfo.ro

2. a)	$\int f^2(x)dx = \int \cos^2 x dx = \int \frac{\cos 2x+1}{2}dx$.	2p
	$\int \frac{\cos 2x+1}{2}dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x+1)dx = \frac{1}{2}(\frac{\sin 2x}{2}+x) + c$.	3p
b)	$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{g(x)}{f(x)})^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{2^{tgx}}{\cos x})^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4^{tgx}}{\cos^2 x}dx$.	2p
	Cu schimbarea de variabilă $tg\, x = t$, $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow t \in [0, 1]$,	1p
	$V = \pi \int_0^1 4^t dt = \pi \frac{4^t}{\ln 4}|_0^1 = \pi \frac{4-1}{\ln 4} = \frac{3\pi}{\ln 4}$.	2p
c)	$I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^n x dx$. Integrând prin părţi se obţine:	1p
	$nI_n = cos^{n-1} x \sin x |_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + (n-1)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n-2} x dx$, $I_{n-2} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n-2} x dx \Rightarrow$	2p
	$nI_n - (n-1)I_{n-2} = cos^{n-1} x \sin x |_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \leftrightarrow nI_n - (n-1)I_{n-2} = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}\frac{\sqrt{2}}{2} - (\frac{\sqrt{3}}{2})^{n-1}\frac{1}{2} \leftrightarrow nI_n - (n-1)I_{n-2} =$	2p
	$\frac{(\sqrt{2})^n - (\sqrt{3})^{n-1}}{2^n}$.	

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Ciocănaru Viorica

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

www.mateinfo.ro

- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(\frac{2}{5})^{4x-3} > (\frac{5}{2})^{2-3x} \leftrightarrow (\frac{2}{5})^{4x-3} > (\frac{2}{5})^{-(2-3x)} \leftrightarrow 4x-3 < -(2-3x)$ deoarece $\frac{2}{5} < 1$. $4x-3 < -(2-3x) \leftrightarrow 4x-3 < 3x-2 \leftrightarrow x < 1 \Rightarrow S = (-\infty, 1)$.	3p 2p
2.	Condiţii de existenţă: $x+1 > 0$, $log_{0,5}(x+1) > 0 \Rightarrow x > -1, x+1 < 1 \Rightarrow (-1, 0)$ (**1**) $log_2(log_{0,5}(x+1)) > 1 \leftrightarrow log_{0,5}(x+1) > 2 \leftrightarrow x+1 < (0,5)^2 \leftrightarrow x < -\frac{3}{4}$ (**2**) Din (1) şi (2) $\Rightarrow x \in (-1, -\frac{3}{4})$.	2p 2p 1p
3.	$z^3 + 64 = (z+4)(z^2 - 4z + 16)$. $(z+4)(z^2-4z+16) = 0 \Rightarrow z_1 = -4$, $z^2 - 4z + 16 = 0$, $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 16 = -48$, $z_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{-48}}{2} = \frac{4 \pm 4i\sqrt{3}}{2} = 2(1 \pm i\sqrt{3}) \Rightarrow z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$. $S = \{-4, 2(1 \pm i\sqrt{3})\}$	1p 3p 1p
4.	$\div C_n^3$, A_n^2, $A_{n+1}^2 \leftrightarrow 2A_n^2 = C_n^3 + A_{n+1}^2$, $n \geq 3$ Formule $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ $0 \leq k \leq n \Rightarrow 2\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ După simplificări, eliminarea numitorului şi reducerea termenilor asemenea ecuaţia devine $n^2 - 9n + 20 = 0$ cu soluţiile $n_1 = 4$, $n_2 = 5$.	2p 3p
5.	$G(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$ $4 = \frac{3+(-2)+x_3}{3} \leftrightarrow x_3 = 11$, $3 = \frac{6+(-3)+y_3}{3} \leftrightarrow y_3 = 6 \Rightarrow$ $C(11, 6)$	1p 3p 1p
6.	Din formula fundamentală $\Rightarrow cos\, a = -\sqrt{1-\sin^2 a}$, $a \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow cos\, a = -\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} = -\frac{4}{5}$,	2p 2p

www.mateinfo.ro

	$cos\ b = -\sqrt{1-\sin^2 b}$, $b \in (\pi, \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow cos\ b = -\sqrt{1-(-\frac{4}{5})^2} = -\frac{3}{5}$ $\Rightarrow cos\ a - cos\ b = -\frac{4}{5} - (-\frac{3}{5}) = -\frac{1}{5}$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Dezvoltnd după prima linie se obţine: $d_1 = (a+b)[(a+b)^2 - a^2] - b^2(a+b-a) + ab(a-a-b)$ În urma calculelor algebrice se obţine: $d_1 = 2ab(a+b)$.	3p 2p
b)	Cu una din regulile de calcul ale determinantului de ordinul 3 se obţine: $d_2(0) = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix}$ $d_2(0) = 48 + 64 + 135 - (96 + 40 + 108) = 3.$	2p 3p
c)	$d_2(x) = \begin{vmatrix} 1+4x & 9 & x+4 \\ 2+5x & 8 & 2x+5 \\ 3+6x & 8 & 3x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & x+4 \\ 2 & 8 & 2x+5 \\ 3 & 8 & 3x+6 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 4 & 9 & x+4 \\ 5 & 8 & 2x+5 \\ 6 & 8 & 3x+6 \end{vmatrix} = d_2^1(x) + x\, d_2^2(x)$ **(1)** $d_2^1(x) = \begin{vmatrix} 1 & 9 & x+4 \\ 2 & 8 & 2x+5 \\ 3 & 8 & 3x+6 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix}$ **(2)** $d_2^2(x) = \begin{vmatrix} 4 & 9 & x+4 \\ 5 & 8 & 2x+5 \\ 6 & 8 & 3x+6 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 9 & 4 \\ 5 & 8 & 5 \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix}$ **(3)** Din **(1)**+ **(2)**+ **(3)** $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix} - x^2 \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 = 1$ $x \in \{\pm 1\}$.	1p 2p 2p
2. a)	$A_x, A_y \in M \Rightarrow A_x \cdot A_y \in M$ $A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x+y & 1 \end{pmatrix} = A_{x+y}$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.	1p 3p

www.mateinfo.ro

	$A_x \cdot A_x = A_{x+y} \in M$	1p
b)	$\forall\ A_x, A_y, A_z \in M,\ (A_x \cdot A_y)\cdot A_z = A_x \cdot (A_y \cdot A_z)$ $(A_x \cdot A_y)\cdot A_z = A_{x+y}\cdot A_z = A_{x+y+z}$, $A_x \cdot (A_y \cdot A_z) = A_x \cdot A_{y+z} = A_{x+y+z}$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$. $A_1 \cdot A_4 \cdot A_9 \ldots \cdot A_{n^2} = A_{1+4+\ldots n^2}$, $\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $A_{1+4+\ldots n^2} = A_{55} \Rightarrow$ $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 55 \leftrightarrow n(n+1)(2n+1) = 5\cdot 6\cdot 11 \Rightarrow n = 5$	3p 2p
c)	$\forall\ A_x \in M, \exists\ A_{x'} \in M\quad A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = A_e$ **(1)** unde e este elementul neutru $\exists\ A_e \in M,\ A_x \cdot A_e = A_e \cdot A_x = A_x\quad \forall\ A_x \in M$, din punctul a) $A_x \cdot A_e = A_{x+e} = A_x \Rightarrow e = 0$ **(2)** În relaţia **(1)** înlocuind e cu valoarea din relaţia **(2)** $\Rightarrow A_{x'} \cdot A_x = A_0 \leftrightarrow x' + x = 0 \leftrightarrow x' = -x$ $A_{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Ecuaţia tangentei la G_f în $M(x_M, y_M)$ $y - y_M = f'(x_M)(x - x_M)$, formula $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	2p
	$f'(x) = (\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2})' = \frac{(2x-2)(x^2-3x+2)-(x^2-2x+3)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}$, $f'(0) = \frac{5}{4}$.	2p
	$y - \frac{3}{2} = \frac{5}{4}x \leftrightarrow 5x - 4y + 6 = 0$.	1p
b)	Pentru D, $f(x) \in [-1, 1]$.	1p
	$-1 \le \frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} \le 1 \Rightarrow \frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} \le 1$ **(1)** şi $\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} \ge -1$ **(2)** .	2p
	(1) $\leftrightarrow \frac{x+1}{x^2-3x+2} \le 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup (1, 2) = I_1$.	
	(2) $\leftrightarrow \frac{2x^2-5x+5}{x^2-3x+2} \ge 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) = I_2 \Rightarrow D = I_1 \cap I_2 = (-\infty, -1]$	2p

www.mateinfo.ro

	$g(-1) = arcsin\, f(-1) = arcsin\, 1 = \frac{\pi}{2}$.	
c)	$L= \lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^{3x-g(-1)} = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2})^{3x-\frac{\pi}{2}}$.	1p
	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}=1,\ \lim\limits_{x\to\infty}(3x-\frac{\pi}{2})=+\infty$.	2p
	Nedeterminarea $1^{+\infty}$, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.	
	$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}-1)^{3x-\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{x+1}{x^2-3x+2})^{3x-\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{x+1}{x^2-3x+2})^{\frac{x^2-3x+2}{x+1}}]^{\frac{(3x-\frac{\pi}{2})(x+1)}{x^2-3x+2}} =$ $e^3 \Rightarrow L = e^3$.	2p
2. a)	$\int\frac{f_n(x)}{x^n}dx = \int\frac{x^n \ln x}{x^n}dx = \int \ln x dx$.	2p
	Integrând prin părţi, se obţine: $\int \ln x dx = x\ ln\ x - \int dx = x\ ln\ x - x + c$.	3p
b)	$\int_e^{e^2}\frac{1}{f_1(x)}dx = \int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$.	1p
	Se foloseşte schimbarea de variabilă $ln\ x = t$, $(ln\ x)' = 1/x$, $x\in[e, e^2] \Rightarrow t\in[1, 2]$.	2p
	$\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx = \int_1^2\frac{1}{t}dt = ln\ t\,|_1^2 = ln\ 2 - ln\ 1 = ln\ 2$	2p
c)	$V = \pi\int_1^2 g^2(x)dx = \pi\int_1^2(\frac{f_n(x)}{x^n})^2dx = \pi\int_1^2 \ln^2 x dx$.	2p
	Integrând prin părţi, se obţine: $V = \pi\int_1^2 \ln^2 x dx = \pi(x\ ln^2\ x\,|_1^2 - 2\int_1^2 \ln x dx) = \pi(x\ ln^2\ x - 2x\ ln\ x + 2x)\,|_1^2$. S-a folosit rezultatul de la subpunctul a).	2p
	$V = \pi(2\ ln^2\ 2 - 4\ ln\ 2 + 4) - \pi(ln^2\ 1 - 2\ ln\ 1 + 2) = 2\pi(ln^2\ 2 - 2\ ln\ 2 + 2)$.	1p

www.mateinfo.ro

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Ciocănaru Viorica

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Numerele care îndeplinesc condiţia din enunţ sunt în progresie aritmetică având	3p
	$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, $a_1 = 14$, $r = 7$, $a_n = 98$ deci $98 = 14 + (n-1)7 \leftrightarrow n = 13$.	
	Suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$, $S_{13} = \frac{(14+98)13}{2} = 728$.	2p
2.	$G_f \cap Ox = \{A, B\}$, $A \neq B$ dacă $\Delta > 0$. Când $m = 1$ funcţia este de gradul I.	1p
	$\Delta = b^2 - 4ac = (3(m+1))^2 - 8(m^2-1) = (m+1)(9m + 9 - 8m + 8) = (m+1)(m+17)$	2p
	$\Delta = 0$ conduce la soluţiile $m_1 = -1$, $m_2 = -17$.	
	Pentru $\Delta > 0$, $m \in (-\infty, -17) \cup (-1, +\infty) - \{1\}$.	2p
3.	$(\sqrt[3]{2x+1})^3 = (x+1)^3$.	1p
	$2x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \leftrightarrow x^3 + 3x^2 + x = 0$	2p
	$x(x^2 + 3x + 1) = 0$ de unde $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac = 5$, $x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$, deci	2p
	$S = \{0, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\}$.	
4.	Formula $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \le k \le n$, $C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!}$, $C_n^6 = \frac{n!}{6!(n-6)!}$, $6 \le n$.	2p
	$\frac{n!}{3!(n-3)!} > \frac{n!}{6!(n-6)!}$ de unde se obţine după simplificări $\frac{1}{(n-3)(n-4)(n-5)} > \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}$,	3p
	$n < 9$ de unde $S = \{6, 7, 8\}$.	

www.mateinfo.ro

5.	Condiţia de coliniaritate a doi vectori $\vec{t} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$ şi $\vec{r} = c\,\vec{i} + d\,\vec{j}$ este $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.	2p
	$\vec{v}$ şi $\vec{u}$ sunt coliniari dacă $\frac{2}{3} = \frac{a+2}{a-3} \leftrightarrow 2(a-3) = 3(a+2) \leftrightarrow a = -12$.	3p
6.	Teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$	2p
	$AB = c = 8$, $\sin C = \sin \frac{\pi}{3}$.	1p
	După înlocuiri şi calcule $\frac{c}{\sin C} = 2R$, $\frac{8}{\sin\frac{\pi}{3}} = 8 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Pentru $p = 0$ $\det A_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow A_0$ este inversabilă.	2p
	Pentru $p = 1$ $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $A_0 + A_1^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$	2p
	$\mathrm{Tr}(A_0 + A_1^t) = 2 + 3 - 6 = -1$.	1p
b)	Din punctul a) $\det A_0 = -1 \Rightarrow \exists A^{-1}$, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$, A^* matricea complementilor algebrici ai lui A_0^t, $A_0^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$	3p
	Complementii algebrici sunt $A_{11} = -1$, $A_{12} = 1$, $A_{13} = 0$, $A_{21} = -6$, $A_{22} = 3$, $A_{23} = 2$, $A_{31} = -3$, $A_{32} = 2$, $A_{33} = 1$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	2p

www.mateinfo.ro

c)	$\sum_{p=1}^{n} A_p = \begin{pmatrix} 1 & 1+1 & 1-2 \\ 3\cdot 1 & 1+1 & -2 \\ 2\cdot 1+3 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2+1 & 2-2 \\ 3\cdot 2 & 2+1 & -2 \\ 2\cdot 2+3 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n-2 \\ 3n & n+1 & -2 \\ 2n+3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	1p
	$\sum_{p=1}^{n} A_p = \begin{pmatrix} n & \sum_{p=1}^{n} p + n & \sum_{p=1}^{n} p - 2n \\ 3\sum_{p=1}^{n} p & \sum_{p=1}^{n} p + n & -2n \\ 2\sum_{p=1}^{n} p + 3n & n & -3n \end{pmatrix}$ cu $\sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$	2p
	$\Rightarrow \sum_{p=1}^{n} A_p = n \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+3}{2} & \frac{n-3}{2} \\ \frac{3(n+1)}{2} & \frac{n+3}{2} & -2 \\ n+4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	2p
2.	$f(1)= 1 + a + b + 3 + 1$ **(1)**, $f(-1)= 1 - a + b - 3 + 1$ **(2)**.	1p
a)	Din relaţiile **(1)** , **(2)**, $f(1) = 7$, $f(-1) = 5 \Rightarrow a + b = 2$, $-a + b = 6$ deci $a = -2$, $b = 4$.	3p
	$f = X^4 - 2X^3 + 4X^2 + 3X + 1$.	1p
b)	$g \mid f$ dacă r din relaţia $f = gq + r$ este zero unde $f, g, q, r \in \mathbf{R}[X]$, grad $q = 2$, grad $r = 1$	3p
	$X^4 + aX^3 + bX^2 + 3X + 1 = (X^2 + X + 1)q + r \Rightarrow$ restul este $(4 - b)x + 1 - b + a = 0$	2p
	deci $a = 3$, $b = 4 \Rightarrow f = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1$	
c)	$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$, $f(1 \pm \sqrt{2}) = (1 \pm \sqrt{2})^4 + a(1 \pm \sqrt{2})^3 + b(1 \pm \sqrt{2})^2 + 3(1 \pm \sqrt{2}) + 1 = 0$,	2p
	f divizibil cu $(X - x_1)(X - x_2) \Rightarrow (X - x_1)(X - x_2) = (X - 1 - \sqrt{2})(X - 1 + \sqrt{2}) = X^2 - 2X - 1$,	
	$X^4 + aX^3 + bX^2 + 3X + 1 = (X^2 - 2X - 1)q \Rightarrow (5a + 2b + 15)x + 2a + b + 6 = 0 \Rightarrow a = -3$, $b = 0$	2p
	$\Rightarrow X^4 - 3X^3 + 3X + 1 = (X^2 - 2X - 1)(X^2 - X - 1) \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Ecuaţia tangentei la G_f în $M(x_M, y_M)$ $y - y_M = f'(x_M)(x - x_M)$, formula $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	2p

www.mateinfo.ro

	$f'(x) = (\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2})' = \frac{(2x-2)(x^2-3x+2)-(x^2-2x+3)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}$, $f'(0) = \frac{5}{4}$.	2p
	$y - \frac{3}{2} = \frac{5}{4}x \leftrightarrow 5x - 4y + 6 = 0$.	1p
b)	Pentru D, $f(x) \in [-1, 1]$.	1p
	$-1 \le \frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} \le 1 \Rightarrow \frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} \le 1$ **(1)** şi $\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} \ge -1$ **(2)** .	1p
	(1) $\leftrightarrow \frac{x+1}{x^2-3x+2} \le 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup (1, 2) = I_1$.	1p
	(2) $\leftrightarrow \frac{2x^2-5x+5}{x^2-3x+2} \ge 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) = I_2 \Rightarrow D = I_1 \cap I_2 = (-\infty, -1]$	2p
	$g(-1) = \arcsin f(-1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.	
c)	$L = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x))^{3x-g(-1)} = \lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2})^{3x-\frac{\pi}{2}}$.	1p
	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} (3x - \frac{\pi}{2}) = +\infty$.	1p
	Nedeterminarea $1^{+\infty}$, $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$.	1p
	$\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}-1)^{3x-\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{x+1}{x^2-3x+2})^{3x-\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x\to\infty} [(1+\frac{x+1}{x^2-3x+2})^{\frac{x^2-3x+2}{x+1}}]^{\frac{(3x-\frac{\pi}{2})(x+1)}{x^2-3x+2}} =$ $e^3 \Rightarrow L = e^3$.	2p
2.	$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ f, g derivabile cu derivatele continue **(1)**	2p
a)	$\int_1^e xf(x)dx = \int_1^e x \ln x dx = (\frac{x^2}{2}\ln x|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx) = (\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4})|_1^e$.	2p
	$\int_1^e xf(x)dx = \frac{e^2+1}{4}$.	1p

www.mateinfo.ro

b)	$V=\pi\int_1^{e^2} g^2(x)dx$, $g(x)=f(x)=\ln x$	1p
	$V=\pi\int_1^{e^2}(\ln x)^2dx$, cu relaţia **(1)** din punctul a) $\Rightarrow$	1p
	$V=\pi[\,x(\ln x)^2\,|_1^{e^2}-2\int_1^{e^2}\ln x dx\,]\Rightarrow$	1p
	$V=\pi[\,x(\ln x)^2-2(x\ln x-x)\,]|_1^{e^2}=e-2.$	2p
c)	cu relaţia **(1)** din punctul a) $\Rightarrow I_n=t(\ln t)^n\,|_1^x-n\int_1^x(\ln t)^{n-1}dt$.	2p
	$I_{n-1}=\int_1^x(\ln t)^{n-1}dt \Rightarrow I_n=x(\ln x)^n-n\,I_{n-1}.$	1p
	Inducţie după $n \Rightarrow I_1=x\ln x-I_0=x\ln x-x+1$	2p
	$I_{n+1}=x(\ln x)^{n+1}-(n+1)\,I_n$, $x>1$, $n\in\mathbf{N}^*$.	

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Ciocănaru Viorica

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z\in\mathbf{C}$, $z=a+bi$, modulul lui $\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$, conjugatul lui z $\bar{z}=a+bi$.	3p
	$z=\frac{3+2i}{1-3i}=\frac{(3+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{-3+11i}{10}$ de unde $\lvert z\rvert=\sqrt{(-\frac{3}{10})^2+(\frac{11}{10})^2}=\frac{\sqrt{130}}{10}$.	2p

2.	$f(f(x)) = 2f(x) - 1$ $f(f(x)) = 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3$, $S = f(f(1)) + f(f(2)) + \ldots . f(f(12)) = 4(1 + 2 + 3 + \ldots 12) - 3 \cdot 12$ $S = 4 \cdot 6 \cdot 13 - 3 \cdot 12 = 276$ sau $f(f(1)) = 1, f(f(2)) = 5$, $f(f(3)) = 9, \ldots f(f(12)) = 45$ deci termeni în progresie aritmetică.	1p 2p 2p
3.	Condiţii pentru radicalii de ordin par $x \geq 0$, $x \leq 3$ $(\sqrt{x} + \sqrt{3-x})^2 = 2^2$ de unde rezultă $3 + 2\sqrt{x(3-x)} = 4 \leftrightarrow 2\sqrt{x(3-x)} = 1$ $x(3 - x) = \frac{1}{4} \leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0$, $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-1}}{2} = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2} \in [0, 3]$ de unde $S = \{\frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2}\}$.	1p 2p 2p
4.	Mulţimea numerelor naturale impare de două cifre A = {11, 13, ... 99}, card A = 45. Mulţimea multiplilor lui 3 B = {15, 21, 27, … 99}, card B = 15 Probabilitatea ca numărul impar de două cifre să fie divizibil cu 3, $p = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.	2p 3p
5.	Ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(x_0, y_0)$ şi are panta cunoscută $y - y_0 = m(x - x_0)$, dreptele paralele au pantele egale. $m_d = \frac{2}{3}$ atunci ecuaţia paralelei la d care trece prin A(2, 1) este $y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \leftrightarrow$ $2x - 3y - 1 = 0$.	2p 3p
6.	Dacă $a \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\cos a < 0$, $\cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\frac{4}{5}$. $ctg\frac{a}{2} = \frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = \frac{\cos^2\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}$ $\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$, $\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1$, $\cos^2\frac{a}{2} = \frac{1}{10}$ de unde $ctg\frac{a}{2} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{5 \cdot 2}} = \frac{1}{3}$.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

www.mateinfo.ro

1. a)	$d=\begin{vmatrix}1 & m & 2\\ 1 & 2m-1 & 3\\ 1 & m & m-3\end{vmatrix}\overset{l_3-l_1}{=}\begin{vmatrix}1 & m & 2\\ 1 & 2m-1 & 3\\ 0 & 0 & m-5\end{vmatrix}=(m-5)(m-1)$.	2p
	$d=0 \Rightarrow m=5,\ m=1$.	2p
	$d\neq 0\ \ \forall m\in\mathbf{R}-\{1,5\}$.	1p
b)	Pentru $m=2$ $\begin{cases}x+2y+2z=1\\ x+3y+3z=1\\ x+2y-z=1\end{cases}$ $d=-3$ cu metoda lui Cramer $D_x=-3$, $D_y=0$, $D_x=0$, sistem compatibil determinat cu $S=\{(1,0,0)\}$.	3p
	Pentru $m=5$ $\begin{cases}x+5y+2z=1\\ x+9y+3z=1\\ x+5y+2z=9\end{cases}$ sistem incompatibil.	2p
c)	Pentru $m=1$ $\begin{cases}x+y+2z=1\\ x+y+3z=1\\ x+y-2z=1\end{cases}$ Din punctul a) $d=0$	1p
	$\Delta_p=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1$, necunoscute principale y şi z, necunoscută secundară $x=\lambda$	2p
	$\Rightarrow\begin{cases}y+2z=1-\lambda\\ y+3z=1-\lambda\end{cases}$ $D_y=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 1-\lambda & 3\end{vmatrix}=1-\lambda$, $D_z=\begin{vmatrix}1 & 1-\lambda\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$, $y=\frac{D_y}{\Delta_p}$, $z=\frac{D_z}{\Delta_p}$, sistemul este simplu nedeterminat cu $S=\{(\lambda, 1-\lambda, 0)\}$, $\lambda\in\mathbf{R}$.	2p
2. a)	$A_x, A_y\in M\Rightarrow A_x\cdot A_y\in M$	1p
	$A_x\cdot A_y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ x+y & 1\end{pmatrix}=A_{x+y}$, $\forall x, y\in\mathbf{R}$.	3p
	$A_x\cdot A_x=A_{x+y}\in M$	1p
b)	$\forall\ A_x, A_y, A_z\in M,\ (A_x\cdot A_y)\cdot A_z=A_x\cdot(A_y\cdot A_z)$ $(A_x\cdot A_y)\cdot A_z=A_{x+y}\cdot A_z=A_{x+y+z}$, $A_x\cdot(A_y\cdot A_z)=A_x\cdot A_{y+z}=A_{x+y+z}$, $\forall x, y, z\in\mathbf{R}$.	3p
	$A_1\cdot A_4\cdot A_9\ldots\cdot A_{n^2}=A_{1+4+\ldots n^2}$, $\sum_{p=1}^{n}p^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $A_{1+4+\ldots n^2}=A_{55}\Rightarrow$	2p

www.mateinfo.ro

	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=55 \leftrightarrow n(n+1)(2n+1)=5\cdot 6\cdot 11 \Rightarrow n=5$	
c)	$\forall\ A_x \in M,\ \exists\ A_{x'} \in M \quad A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = A_e$ **(1)** unde e este elementul neutru	2p
	$\exists\ A_e \in M,\ A_x \cdot A_e = A_e \cdot A_x = A_x \quad \forall\ A_x \in M$, din punctul a) $A_x \cdot A_e = A_{x+e} = A_x \Rightarrow e = 0$ **(2)**	2p
	În relaţia **(1)** înlocuind e cu valoarea din relaţia **(2)** $\Rightarrow A_{x'} \cdot A_x = A_0 \leftrightarrow x' + x = 0 \leftrightarrow x' = -x$	1p
	$A_{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.	

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\frac{x+1}{x-1} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow D = \mathbf{R} - [-1, 1]$	2p
	$f(-x) = \ln\frac{-x+1}{-x-1} = \ln\frac{x-1}{x+1} = -\ln\frac{x+1}{x-1} = -f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R} - [-1, 1]$ deci f impară	2p
	$\lim\limits_{x\to\infty} \ln\frac{x+1}{x-1} = \ln 1 = 0 \Rightarrow y = 0$ ecuaţia asimptotei orizontale la $\pm\infty$.	
	$\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \ln\frac{x+1}{x-1} = +\infty \Rightarrow x = 1$ ecuaţia asimptotei verticale la dreapta lui 1 şi analog $x = -1$	1p
	ecuaţia asimptotei verticale la stânga lui – 1.	
b)	$S_n = f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = \ln\frac{2+1}{2-1} + \ln\frac{3+1}{3-1} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n-1}$.	1p
	$S_n = \ln\frac{3}{1} + \ln\frac{4}{2} + \ln\frac{5}{3} + \ldots + \ln\frac{n}{n-2} + \ln\frac{n+1}{n-1}$.	1p
	$\sum\limits_{k=1}^{n} \ln a_k = \ln\prod\limits_{k=1}^{n} a_k$, $a_k > 0$.	1p
	$S_n = \ln\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n+1}{n-1} = \ln\frac{n(n+1)}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} S_n = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\frac{n(n+1)}{2} = +\infty$.	2p
c)	$L = \lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x \ln\frac{x+1}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\frac{x+1}{x-1} = 0 \Rightarrow$ nedeterminarea $+\infty\, 0$	1p
		1p

www.mateinfo.ro

	$L = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\dfrac{x+1}{x-1}}{\dfrac{1}{x}} \Rightarrow$ nedeterminarea $\dfrac{0}{0}$	1p
	Formulele $(ln\ u)' = \dfrac{u'}{u}$, $(\dfrac{f}{g})' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.	2p
	Cu regula lui l'Hopital $\Rightarrow L = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\ln\frac{x+1}{x-1})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{-2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{x^2-1} = 2.$	
2. a)	$f(x) = sin\ x$, $g(x) = \int_0^x f(t^2)dt = \int_0^x \sin t^2 dt$, g continuă $\Rightarrow$ $g(x) = G(t)\ |_0^x = G(x) - G(0)$.	2p
	$L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{G(x)-G(0)}{x^3}$, nedeterminarea $\dfrac{0}{0} \Rightarrow L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(G(x)-G(0))'}{(x^3)'}$	2p
	$L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{3x^2} \underset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cos x^2}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x^2}{3} = \dfrac{1}{3}$	1p
b)	$h(x) = e^{f(x)}\cos x = e^{\sin x}\cos x$	1p
	$\int h(x)dx = \int e^{\sin x}\cos x dx$ **(1)**	1p
	$(sin\ x)' = \cos x$ deci $sin\ x = t$ **(2)**	1p
	Din **(1)** şi **(2)** $\Rightarrow \int e^t dt = e^t + c \Rightarrow \int h(x)dx = e^{\sin x} + c$	2p
c)	$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = [-x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x)]\ |_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow I_2 = \pi - 2$.	2p
	Cu integrare prin părţi $\Rightarrow I_n = -x^n \cos x\ |_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1}\cos x dx \Rightarrow$	1p
	$I_n = -x^n \cos x\ |_0^{\frac{\pi}{2}} + n[x^{n-1}\sin x\ |_0^{\frac{\pi}{2}} - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-2}\sin x dx]$, $I_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-2}\sin x dx \Rightarrow$	2p

www.mateinfo.ro

	$I_n = n[(\frac{\pi}{2})^{n-1} - (n-1)\ I_{n-2}],\ n \in \mathbf{N}^*$	

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Ciocănaru Viorica

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+i)^{12} = ((1+i)^2)^6 = (2i)^6 = -2^6,\ i^2 = -1,\ i^{2012} = (i^4)^{503} = 1.$	3p
	$\Rightarrow z = \frac{(1+i)^{12}}{i^{2012}} = -2^6 \in \mathbf{Z},\ \bar{z} = z = -2^6 \Rightarrow z, \bar{z} \in \mathbf{Z}.$	2p
2.	$S = x_1 + x_2 = -a,\ P = x_1 x_2 = b,\ \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}.$	1p
	$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2).$	2p
	$x_1^3 + x_2^3 = (-a)^3 - 3b(-a) = -a^3 + 3ab \in \mathbf{Z},\ \forall a, b \in \mathbf{Z}.$	2p
3.	$2^{2x+1} + 2^{x-1} = 132 \leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x} + \frac{2^x}{2} = 132.$	1p
	$2^x = t,\ t > 0 \quad 2 \cdot t^2 + \frac{t}{2} = 132 \leftrightarrow 4 \cdot t^2 + t - 264 = 0 \leftrightarrow t^2 + \frac{t}{4} - 66 = 0 \leftrightarrow (t-8)(t + \frac{33}{4}) = 0.$	2p
	$\Rightarrow t_1 = 8, t_2 = -\frac{33}{4} < 0 \Rightarrow 2^x = 8 \leftrightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{3\}.$	2p
4.	$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,\ T_{k+1} = \frac{165}{2^{11}},\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ k+1 = 9,\ n = 11,\ b = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$	2p

www.mateinfo.ro

	$C_{11}^8 a^3 (\frac{1}{2\sqrt{2}})^8 = \frac{165}{2^{11}} \leftrightarrow \frac{11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3} a^3 \frac{1}{2^8\cdot 2^4} = \frac{165}{2^{11}} \leftrightarrow a^3 = 2$, $a \in \mathbf{R} \Rightarrow a \in \{\sqrt[3]{2}\}$.	3p
5.	$d \perp AB \Rightarrow m_d \cdot m_{AB} = -1$, d: $y - y_M = m_d(x - x_M)$ $d \cap AB = \{M\}$, $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$.	2p
	$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{2}{5}$, $\Rightarrow m_d = \frac{5}{2}$, $M(\frac{1}{2}, 3)$	3p
	$\Rightarrow d$: $y - 3 = \frac{5}{2}(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow d$: $10x - 4y + 7 = 0$.	
6.	$tg^2 a = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} - 1 \Rightarrow \cos^2 a = \frac{1}{tg^2 a + 1}$.	2p
	$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$.	1p
	$\Rightarrow \cos^2 a = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos 2a = 2\cdot\frac{1}{3} - 1 \leftrightarrow \cos 2a = -\frac{1}{3}$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	2p
	$A^2 = \begin{pmatrix} 3p^2 & 3p^2 & 3p^2 \\ 3p^2 & 3p^2 & 3p^2 \\ 3p^2 & 3p^2 & 3p^2 \end{pmatrix}$	2p
	$A^2 = 3p\begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix} = 3pA.$	1p
b)	$\det(A - I_3) = \begin{vmatrix} p-1 & p & p \\ p & p-1 & p \\ p & p & p-1 \end{vmatrix} = (p-1)^3 + 2p^3 - 3p^2(p-1)$	3p
	$\det(A + I_3) = \begin{vmatrix} p+1 & p & p \\ p & p+1 & p \\ p & p & p+1 \end{vmatrix} = (p+1)^3 + 2p^3 - 3p^2(p+1)$	

www.mateinfo.ro

	$\det(A-I_3)=3p-1,\ \det(A+I_3)=3p+1 \Rightarrow \det(A-I_3)\det(A+I_3)=(3p)^2-1$	2p
c)	$n=1 \Rightarrow A=(3p)^{1-1}\cdot A$	1p
	Prin inducţie, se presupune $A^n=(3p)^{n-1}\cdot A$ adevărată şi se calculează $A^{n+1}=(3p)^{n-1}\cdot A^2$ din punctul a) $\Rightarrow A^{n+1}=(3p)^{n-1}\cdot 3p\cdot A=(3p)^n\cdot A,\ \forall n\in \mathbf{N}^*,\ \forall p\in \mathbf{R}$.	2p
	Pentru $n=2012$, $A^n=(3p)^{n-1}\cdot A$ se obţine $A^{2012}=(3p)^{2011}\cdot A$	2p
2.	$\exists e\in \mathbf{Z}, x\circ e=e\circ x=x,\ \forall x\in \mathbf{Z}$.	1p
a)	Pentru $n=2$, $x\circ y=xy-2(x+y)+6,\ \forall x,y\in \mathbf{Z}$ şi $x\circ e=xe-2(x+e)+6$ de unde	3p
	$xe-2(x+e)+6=x \leftrightarrow e(x-2)=3x-6 \leftrightarrow e=3$.	
	$S=\{3\}\ \ \forall x\in \mathbf{Z}$.	1p
b)	$\begin{cases} x*y=x+y-n \\ x\circ y=xy-n(x+y)+n(n+1) \end{cases}$ devine $\begin{cases} x+y-n=1 \\ xy-n(x+y)+n(n+1)=n \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x+y=n+1 \\ xy=n \end{cases}$ **(1)**.	3p
	Sistemul **(1)** este simetric deci $S=\{(1,n),(n,1)\},\ \forall n\in \mathbf{N}^*$.	2p
c)	$\forall x,y\in \mathbf{Z}\ f(x*y)=f(x)+f(y),\ f(x*y)=a(x+y-n)+b,\ f(x)+f(y)=a(x+y)+2b \Rightarrow$	2p
	$-an=b$ **(1)**.	
	$\forall x,y\in \mathbf{Z}\ f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y),\ f(x\circ y)=a(xy-n(x+y)+n(n+1))+b,\ f(x)\cdot f(y)=(ax+b)(ay+b) \Rightarrow a=a^2$ **(2)**, $an(n+1)+b=b^2$ **(3)**.	2p
	Din **(1)**, **(2)** şi **(3)** $\Rightarrow a=1,\ b=-n$ deci $f(x)=x-n$.	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(1)=\ln(3-2)=0,\ h(1)=2+1-3=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(3x-2)}{2x^2+x-3}$ este în cazul de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$	2p
	Cu regula lui l'Hopital, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{h'(x)}$, $f'(x)=(\ln(3x-2))'=\dfrac{3}{3x-2}$,	2p
	$h'(x)=(2x^2+x-3)'=4x+1$ şi $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{h'(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{3}{3x-2}}{4x+1}=\dfrac{3}{5}$.	
	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{h(x)}=\dfrac{3}{5}$.	1p

b)	Formula $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ şi $k(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$.	1p
	D = $(\frac{2}{3}, +\infty) - \{1\}$.	1p
	$k'(x) = (\frac{\ln(3x-2)}{2x^2+x-3})' = \frac{(\ln(3x-2))'(2x^2+x-3) - (2x^2+x-3)'\ln(3x-2)}{(2x^2+x-3)^2}$	1p
	$k'(x) = \frac{\frac{3}{3x-2}(2x^2+x-3) - (4x+1)\ln(3x-2)}{(2x^2+x-3)^2} = \frac{3(2x^2+x-3) - (3x-2)(4x+1)\ln(3x-2)}{(2x^2+x-3)^2(3x-2)}$	2p
	domeniul de derivabilitate este $(\frac{2}{3}, +\infty) - \{1\}$.	
c)	$g(x) = log_x(x+1) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$, $x > 1$.	1p
	Cu formula de la punctul b) $g'(x) = (\frac{\ln(x+1)}{\ln x})'$, $(ln\ x)' = \frac{1}{x}$ şi $(ln\ (x+1))' = \frac{1}{x+1}$.	1p
	$g'(x) = \frac{x\ln x - (x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}$, numitorul este pozitiv, *xlnx* este strict crescătoare pentru $x > 1$	1p
	iar $\frac{x\ln x - (x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x} < 0$ deci *g* este descrescătoare pentru $x > 1$.	
	$g(x) = log_x(x+1) \Rightarrow g(5) = log_5 6$, $g(3) = log_3 4$, $g(5) < g(3)$ cu $3 < 5$.	2p
2. a)	$\int f_1(x)dx = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -(x+1)e^{-x} + c$.	2p
	$\int_{\ln 2}^{\ln 3} xe^{-x}dx = [-(x+1)e^{-x}]\Big|_{\ln 2}^{\ln 3} = -(\ln 3+1)e^{-\ln 3} + (\ln 2+1)e^{-\ln 2} = -(\ln 3+1)\frac{1}{3} + (\ln 2+1)\frac{1}{2}$.	2p
	$\int_{\ln 2}^{\ln 3} xe^{-x}dx = \ln\sqrt{2} + \frac{1}{2} - (\ln\sqrt[3]{3} + \frac{1}{3}) = \ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{6}$.	1p
b)	$I_n = \int f_n(x)dx = \int x^n e^{-x}dx$.	1p
	$I_n = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}dx$.	1p
	$I_{n-1} = \int x^{n-1}e^{-x}dx \Rightarrow I_n = -x^n e^{-x} + n\ I_{n-1}, n \in \mathbf{N}^*$	1p

www.mateinfo.ro

	Pentru $n=2$ $I_2=-x^2e^{-x}+2\ I_1$, cu din punctul a) $I_1=\int f_1(x)dx=-xe^{-x}-e^{-x}\Rightarrow$ $I_2=-x^2e^{-x}+2(-xe^{-x}-e^{-x})=-(x^2+2x+2)e^{-x}$.	2p
c)	$L_n=\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt=\lim\limits_{x\to\infty}[-x^ne^{-x}+n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt]=n\,L_{n-1}$.	2p
	$L_n=n\,L_{n-1}=n(n-1)\,L_{n-2}=n(n-1)(n-2)\,L_{n-3}=....=n!\,L_1$	1p
	$L_1=\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x te^{-t}dt=\lim\limits_{x\to\infty}(-(t+1)e^{-t}\mid_0^x)=\lim\limits_{x\to\infty}(-\frac{x+1}{e^x}+1)=1\Rightarrow L_n=n!$	2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Cristea Maria

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{1}{2^{1005}}(1+i)^{2010}=\frac{1}{2^{1005}}[(1+i)^2]^{1005}=i^{1005}$	3p
	$i^{1005}=(i^2)^{502}\cdot i=(-1)^{502}\cdot i=i$	2p
2.	Condiţii de existenţă: $x-2\geq 0, x-3\geq 0, 3x-5\geq 0$	1p
	Domeniul de definiţie: $D=[3,\infty)$	1p
	$1+\sqrt{x-2}=\frac{\sqrt{x-3}+2+\sqrt{3x-5}}{2}$	1p
	$2\sqrt{x-2}=\sqrt{x-3}+\sqrt{3x-5}$	
	$4(x-2)=x-3+3x-5+2\sqrt{(x-2)(3x-5)}\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-3)(3x-5)}=0$	
	$x-3=0\Rightarrow x=3\in D$ sau $3x-5=0\Rightarrow x=\frac{5}{3}\in D$	2p
	$S=\{3\}$.	
3.	$4^x-2^x-12=0\Leftrightarrow(2^x)^2-2^x-12=0$	1p
	Notăm $2^x=a$	
	Ecuaţia devine: $a^2-a-12=0\Rightarrow a_1=4, a_2=-3$	2p
	$2^x=4\Leftrightarrow 2^x=2^2\Rightarrow x=2$	2p
	$2^x=-3$ imposibil	

www.mateinfo.ro

	$S=\{2\}$.	
4.	Mulţimea A are 7 elemente, deci numărul de submulţimi ale mulţimii A este: $C_7^0+C_7^1+\cdots+C_7^7=2^7=128$. Prin urmare mulţimea A posedă $128-C_7^0=127$ submulţimi nevide. Submulţimile care au toate elementele pare sunt submulţimi ale mulţimii $B=\{2,4,6\}$. Deoarece mulţimea B are 3 elemente , va avea $2^3-1=7$ submulţimi nevide. Probabilitatea cerută este $P=\frac{7}{127}$.	2p 2p 1p
5.	Vectorii $\vec{u}=(m-3)\vec{i}+4$ şi $\vec{v}=8\vec{i}-(15-m)\vec{j}$ sunt perpendiculari dacă are loc relaţia: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ Prin urmare $(m-3)\cdot 8+4(m-15)=0$, adică $12m=84$ cu soluţia $m=7$.	2p 2p 1p
6.	Se observă că numerele 6, 8 şi 10 sunt pitagorice. $10^2=6^2+8^2$, deci triunghiul este dreptunghic. În acest caz lungimea razei cercului circumscris este egală cu jumatate din lungimea ipotenuzei, adică $R=\frac{10}{2}=5$.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Legea de compoziţie " $*$" este bine definită dacă $\forall x,y\in G\Rightarrow x*y\in G$. $x,y\in G\Leftrightarrow x,y\in(1,2)\cup(2,\infty)\Rightarrow(x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}$ are sens şi că $(x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}>0$.Deci $1+(x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}>1$. Pentru a arăta că $x*y\neq 2$ presupunem contrariu. Din $x*y=2\Rightarrow(x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}=1$, relaţie adevărată doar dacă $x-1=1$ sau $\ln\sqrt{y-1}=0$, de unde $x=2$ sau $y=2$. Deoarece $x,y\in(1,2)\cup(2,\infty)$, rezultă că presupunerea facută este falsă, deci $x*y\neq 2$. Prin urmare legea de compoziţie " $*$" este bine definită.	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

b)	Legea de compoziţie " $*$"este comutativă dacă $x*y=y*x,\forall x$, $y\epsilon G=(1,2)\cup(2,\infty)$. Se observă că : $x*y-1=(x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}$, oricare ar fi $x,y\in G$. $y*x-1=(y-1)^{\ln\sqrt{x-1}}$ oricare ar fi $x,y\in G$. Pentru a demonstra comutativitatea logaritmăm expresiile de mai sus. $\ln(x*y-1)=\ln\sqrt{y-1}\ln(x-1)=\frac{1}{2}\ln(y-1)\ln(x-1)$, iar $\ln(y*x-1)=\ln\sqrt{x-1}\ln(y-1)=\frac{1}{2}\ln(x-1)\ln(y-1)$, ceea ce conduce la $x*y=y*x$, $\forall x, y\in\mathbb{R}$. Deci, legea de compoziţie " $*$"este comutativă.	1p 1p 2p 1p
c)	Pentru a rezolva ecuaţia ecuaţia $x*e_1=2$, aflăm mai întâi elemtul neutru e_1. $\exists e_1$ astfel încât $x*e_1=e_1*x=x$, $\forall x\in G$. Întrucât legea " $*$"este comutativă vom considera doar $x*e_1=x\Leftrightarrow$ $1+(x-1)^{\ln\sqrt{e_1-1}}=x\Leftrightarrow(x-1)^{\ln\sqrt{e_1-1}}=x-1$, cum $x-1\neq1\Rightarrow\ln\sqrt{e_1-1}=1$ de unde $e_1=x^2+1\epsilon G$. $x*e_1-1=2\Leftrightarrow(x-1)^{\ln\sqrt{e^2}}=2\Rightarrow x-1=2\Rightarrow x=3$.	1p 2p 2p
2. a)	Funcţia polinomială $f(x)=x^4-4x^2+9=(x^2+3)^2-10x^2=(x^2-\sqrt{10}x+3)(x^2+\sqrt{10}x+3)$ $f(x)=0\Rightarrow x^2-\sqrt{10}x+3=0$ cu soluţiile $x_{1,2}=\frac{\sqrt{10}\pm i\sqrt{2}}{2}$ şi $x^2+\sqrt{10}x+3=0$ cu soluţiile $x_{3,4}=\frac{-\sqrt{10}\pm i\sqrt{2}}{2}$. Prin urmare $a=\frac{\sqrt{10}-i\sqrt{2}}{2}$ este una dintre soluţiile lui $f(x)\Rightarrow f(a)=0$.	1p 3p 1p
b)	Din punctul anterior se observă că funcţia $f(x)=0$ are soluţiile $x_{1,2}=\frac{\sqrt{10}\pm i\sqrt{2}}{2}$ şi $x_{3,4}=\frac{-\sqrt{10}\pm i\sqrt{2}}{2}$. Putem descompune $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$, cu x_1, x_2, x_3, $x_4\epsilon\mathbb{C}$ stabilite anterior. Deci polinomul f este reductibil peste $\mathbb{C}_{[x]}$.	2p

www.mateinfo.ro

	Dar funţia $f(x)$ poate fi descompusă şi astfel $f(x)=x^4-4x^2+9=(x^2+3)^2-10x^2=\left(x^2-\sqrt{10}x+3\right)\left(x^2+\sqrt{10}x+3\right)$. Deoarece coeficienţii aparţin mulţimii $\mathbb{R}$ rezultă că polinomul f este reductibil peste $\mathbb{R}_{[x]}$. Din cele stabilite anterior se observă cu uşurinţă că polinomul f nu este reductibil peste $\mathbb{Q}_{[x]}$.	2p 1p
c)	Notăm cu $S_n=a_1^n+a_2^n+a_3^n+a_4^n,\ n\in\mathbb{N}^*$. a_1 soluţie a funcţiei $f(x)\Rightarrow a_1^4-4a_1^2+9=0$ a_2 soluţie a funcţiei $f(x)\Rightarrow a_2^4-4a_2^2+9=0$ a_3 soluţie a funcţiei $f(x)\Rightarrow a_3^4-4a_3^2+9=0$ a_4 soluţie a funcţiei $f(x)\Rightarrow a_4^4-4a_3^2+9=0$ Prin adunarea acestor relaţii se obţine: $(a_1^4+a_2^4+a_3^4+a_4^4)-4(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)+36=0\Leftrightarrow S_4-4S_2+36=0$ Deoarece $S_2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}=8\Rightarrow S_4=-36+4\cdot 8=-4$ Se deduce că $S_6-4S_4+36S_2=0\Rightarrow S_6=4\cdot(-4)-36\cdot 8=-304$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Se verifică prin calcul. $f'(x)=[\ln(1+x)-x]'=\frac{1}{1+x}-1=\frac{1-1-x}{1+x}=\frac{-x}{1+x}$ $g'(x)=\left(\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right)'=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{1-1-x+x+x^2}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}$	3p 2p
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-x}{1+x}=0\Rightarrow x=0\Rightarrow f'_{(x)}>0,\forall x\in(-1,0)$ şi $f'(x)<0,\forall x\in[0,\infty)\Rightarrow x=0$ este punct de maxim, deci $f(0)$ este valoare maximă, prin urmare $f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<0,\forall\epsilon(-1,\infty)$ $g'(x)>0,\forall x\in(-1,0)$ şi $g'(x)>0,\forall x\in[0,\infty)\Rightarrow x=0$ este punct de minim, deci $g(x)>0$ este valoare minimă, prin urmare $g(x)>g(0)\Leftrightarrow g(x)>0,\forall x\in(0,\infty)$.	2p 2p

www.mateinfo.ro

	Deci $f(x) < 0 < g(x)$, $\forall x > 0$.	1p
c)	Din punctul anterior avem $\ln(1+x) - x < 0 < \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow -x < -\ln(1+x) < -x + \frac{x^2}{2}$ $\Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, $\forall x > 0$. Vom avea $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} < \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}$ $\frac{3}{n^2} - \frac{3^2}{2n^4} < \ln\left(1+\frac{3}{n^4}\right) < \frac{3}{n^2}$ ..... $\frac{2n-1}{n^2} - \frac{(2n-1)^2}{2n^4} < \ln\left(1+\frac{2n-1}{n^2}\right) < \frac{2n-1}{n^2}$ Adunând aceste inegalităţile de mai sus obţinem: $\frac{1}{n^2}(1+3+\cdots+2n-1) - \frac{1}{2n^4}(1+3^2+\cdots+(2n-1)^2) < \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right) +$ $+\ln\left(1+\frac{2n-1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}(1+3+\cdots+2n-1) \Leftrightarrow$ $1 - \frac{n(4n^2-1)}{6n^4} < \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{2n-1}{n^2}\right) < 1$.Trecând la limită şi aplicând teorema cleştelui , obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{2n-1}{n^2}\right) = 1$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(4n^2-1)}{6n^4} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2-1}{6n^3} = 0$.	1p 1p 1p 2p
2. a)	Avem $f(1) = 1+1+\cdots+1 =$ $=2003$.	3p 2p
b)	$F'_{(x)} = \left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)' = \left(F_{(t)}\Big|_0^x\right)' = (F_{(x)} - F_{(0)})' =$ $= f(x) - 0 = f(x)$.	3p 2p
c)	Pentru a calcula $\int_0^a g(x)\,dx$, ştiind că funcţia $g(x) = F_{(x)}^{-1}$ facem schimbarea de variabilă $g(x) = t \Rightarrow x = F_{(t)}$ şi $dx = f(t)\,dt$ Pentru $x = 0$ avem $F_{(t)} = 0$, deci $t = 0$ iar pentru $x = a$, avem $F_{(t)} = a = F_{(1)}$, adică $t = 1$, deoarece $F_{(x)} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2003}}{2003}$. Deci	2p 1p

www.mateinfo.ro

	$\int_0^a g(x)\,dx=\int_0^1 tf(t)\,dt=\int_0^1(t+t^2+t^3+\cdots+t^{2003})\,dt\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots+\frac{t^{2004}}{20}\Big|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2004}$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Cristea Maria

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{5}{2}\left(\frac{1}{1-2i}+\frac{1}{1+2i}\right)=\frac{5}{2}\left(\frac{1+2i}{(1+2i)(1-2i)}+\frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}\right)=\frac{5}{2}\left(\frac{1+2i}{5}+\frac{1-2i}{5}\right)$ $\frac{5}{2}\left(\frac{1+2i}{5}+\frac{1-2i}{5}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}=1$	3p 2p
2.	Tripletul $3x-1,\ x+3,\ 9-x$ constituie termenii consecutivi ai unei progresii geometrice dacă are loc relaţia: $x+3=\sqrt{(3x-1)(9-x)}$, Condiţii de existenţă: $(3x-1)(9-x)\geq 0$ $\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{3};9\right]$ $(x+3)^2=(3x-1)(9-x)$, adică $4x^2-22x+18=0\Leftrightarrow 2x^2-11x+9=0$ cu soluţiile $x_1=\frac{9}{2}$ şi $x_2=1$, ambele aparţinând intervalului $\left[\frac{1}{3};9\right]$. $S=\left\{\frac{9}{2};1\right\}$.	1p 2p 1p
3.	$10^x+4^x-2\cdot 25^x=0\Leftrightarrow 2^x\cdot 5^x+(2^x)^2-2\cdot(5^x)^2=0\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left[\left(\frac{2}{5}\right)^x\right]^2-2=0$, s-au împărţit ambii membrii ai ecuaţiei cu $5^{2x}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ Notăm $\left(\frac{2}{5}\right)^x=t$. Se obţine ecuaţia: $t^2+t-2=0$ cu soluţiile $t_1=-2$ şi $t_2=1$.	1p 2p

www.mateinfo.ro

	Înlocuind $\left(\frac{2}{5}\right)^x = 1 = \left(\frac{2}{5}\right)^0 \Rightarrow x = 0$ Ecuația $\left(\frac{2}{5}\right)^x = -2$ nu are soluție. Deci $S = \{0\}$.	2p
4.	Mulțimea A are 6 elemente, deci numărul de submulțimi nevide ale mulțimii A este: $2^6 - 1 = 63$. Dintre submulțimile nevide ale mulțimii A există $C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6 - (C_6^0 + C_6^1 + C_6^2) = 42$ submulțimi care au cel puțin trei elemente. Probabilitatea cerută este: $P = \frac{42}{63} = \frac{2}{3}$.	2p 2p 1p
5.	Vectorii $\vec{u} = (m-3)\vec{i} + 4$ și $\vec{v} = 8\vec{i} - (15-m)\vec{j}$ sunt coliniari dacă are loc relația: $\frac{m-3}{8} = \frac{4}{-(15-m)} \Leftrightarrow (m-3)(m-15) = 32 \Leftrightarrow m^2 - 18m + 13 = 0$ cu soluțiile $m_1 = 9 + 2\sqrt{17}$ și $m_2 = 9 - 2\sqrt{17}$	2p 3p
6.	Raza cercului circumscris este $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4A}$, unde a, b și c sunt laturile triunghiului iar A aria acestuia. Din formula lui Heron $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+5+6}{2} = 9$, deci $A = \sqrt{9(9-7)(9-5)(9-6)} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3} = 6\sqrt{6}$. Prin urmare $R = \frac{5 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 6\sqrt{6}} = \frac{35}{4\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24}$.	1p 2p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$x, y \in (-1, \infty) \Rightarrow x + 1 > 0$ și $y + 1 > 0 \Rightarrow (x+1)(y+1) > 0 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) - 1 > -1 \Rightarrow$ $xTy = (x+1)(y+1) - 1 > -1$, adică $xTy \in G = (-1, \infty)$, $\forall x, y \in G$. Deci, legea de compoziție "T" este corect definită. $x, y \in (1, \infty) \Rightarrow x - 1 > 0$ și $y - 1 > 0 \Rightarrow (x-1)(y-1) > 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) + 1 > 1 \Rightarrow$ $x * y = (x-1)(y-1) + 1 > 1$, adică $x * y \in G' = (1, \infty)$, $\forall x, y \in G'$.	2p 2p

	Deci, legea de compoziţie "$*$" este corect definită.	1p
b)	$\exists e_1 \in G$ astfel încât $e_1 T x = xTe_1 = x$, $\forall x \in G$. Evident legea "T" este comutativă, deci pentru a afla elementul neutru este suficient să folosim doar relaţia $e_1 T x = x \Leftrightarrow (e_1 + 1)(x + 1) - 1 = x \Leftrightarrow$ $(x+1)\cdot e_1 = 0$, deoarece $x + 1 \neq 0 \Rightarrow e_1 = 0 \in G$, deci 0 este element neutru. $\exists e_2 \in G'$ astfel încât $e_2 * x = x * e_2 = x$, $\forall x \in G'$.Evident legea „$*$" este comutativă, deci pentru a afla elementul neutru este suficient să folosim doar relaţia $e_2 * x = x \Leftrightarrow (e_2 - 1)(x - 1) + 1 = x \Leftrightarrow$ $(x-1)(e_2 - 2) = 0$, deoarece $x - 1 \neq 0 \Rightarrow e_2 = 2 \in G'$. Prin urmare $(e_1 T e_2) * (e_1 * e_2) = 2 * 0 = 0$.	2p 2p 1p
c)	Funcţia $f(x): G \to G'$ este izomorfism dacă : $a)$ $f(x)$ este bijectivă. $b)$ $f(xTy) = f(x) * f(y)$, $\forall x, y \in G$. $a)$ $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$, deci $f(x)$ este injectivă. $\forall y \in G'$, există cel puţin un element $x \in G$, astfel încât $f(x) = y \Rightarrow x = y - 2$ (adevărat deoarece $\forall y > 1$, există cel puţin un $x = y - 2 > -1$ astfel încât $f(x) = y$) , deci $f(x)$ este surjectivă. Prin urmare, din cele stabilite anterior, rezultă că $f(x)$ este bijectivă. $b)$ $f(xTy) = xTy + 2 = xy + x + y + 2$, iar $f(x) * f(y) = f(x) \cdot f(y) - f(x) - f(y) + 2 =$ $= (x+2)(y+2) - (x+2) - (y+2) + 2 = xy + x + y + 2$, deducem că $f(xTy) = f(x) * f(y)$, $\forall x, y \in G$, ceea ce arată că $f(x)$ este morfism de grupuri. Drept urmare, $f(x)$ este izomorfism de grupuri.	1p 1p 2p 1p
2. a)	Metoda 1. $1 - i$ este rădăcină a funcţiei $f(x) \Rightarrow f(x)$ se divide cu $x - 1 + i$, dar şi $1 + i$ este rădăcină a funcţiei $f(x)$, deci $f(x)$ se divide cu $x - 1 - i$. Prin urmare $f(x)$ se divide cu $(x - 1 + i)(x - 1 - i) = x^2 - 2x + 2$. Din teorema împărţirii cu rest rezultă $f(x) = x^3 + x^2 + ax + b = (x^2 - 2x + 2)(x + 3) + (a + 4)x + b - 6$, şi punând condiţia $(a + 4)x + b - 6 = 0 \Rightarrow a = -4$ şi $b = 6$.	1p 3p 1p

www.mateinfo.ro

	Metoda 2. $1-i$ este rădăcină a funcţiei $f(x) \Rightarrow f(1-i)=0 \Leftrightarrow (-4-a)i+a+b-2=0 \Rightarrow$ $-4-a=0$ şi $a+b-2=0 \Rightarrow a=-4$ şi $b=6$.	
b)	Deoarece $1+\sqrt{2}$ este o rădăcină a funcţiei $f(x)$, rezultă că şi conjugata $1-\sqrt{2}$ este rădăcină a funcţiei $f(x)$. Pentru a afla a treia rădăcină este necesar sa determinăm valorile parametrilor a şi b. $1+\sqrt{2}$ este o rădăcină a funcţiei $f(x) \Rightarrow f(1+\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow (7+a)\sqrt{2}+10+a+b=0 \Rightarrow$ $7+a=0$ şi $10+a+b=0 \Rightarrow a=-7$ şi $b=-3$. Deducem că $f(x)=(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})\cdot(x+3)=(x^2-2x-1)(x+3)$ rezultă din $f(x)=0$ că $x+3=0$, deci a treia rădăcină este -3.	1p 2p 2p
c)	Funcţia $f(x)$ are o rădăcină triplă $\Rightarrow f(x)=0$, $f'(x)=0$ şi $f''(x)=0$. $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+2x+a=0 \Rightarrow \frac{1}{3}-\frac{2}{3}+a=0 \Rightarrow a=\frac{1}{3}\in\mathbb{Q}$. $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3+x^2+ax+b=0 \Rightarrow -\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+b=0 \Rightarrow b=\frac{1}{27}\in\mathbb{Q}$	1p 1p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f_1(x)=(x\cdot e^x)'=e^x+xe^x$, $f_2(x)=(e^x+x\cdot e^x)'=e^x+e^x+x\cdot e^x=e^x(2+x)$ $f_2(x)=0 \Leftrightarrow e^x(x+2)=0$, deoarece $e^x\neq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$	3p 2p
b)	Pentru a calcula limita cerută aflăm $f_n(x)$ şi $f_{n+1}(x)$. Obervăm că $f_1(x)=e^x(1+x)$ $f_2(x)=e^x(2+x)$..... Intuim că $f_n(x)=e^x(n+x)$ şi demonstrăm această relaţie prin inducţie. Fie P_n : $f_n(x)=e^x(n+x)$ Etapa de verificare. $P_{(1)}: f_1(x)=e^x(1+x)$, adevărat.	1p 2p

www.mateinfo.ro

	Etapa de demonstraţie.Presupunem adevărată propoziţia $P_{(k)}: f_k(x)=e^x(k+x)$ şi demonstrăm adevărată propoziţia $P_{k+1}: f_{k+1}(x)=e^x(k+1+x)$. Dar $f_{k+1}(x)=f_k'(x)=\left(e^x(k+x)\right)'=e^x(k+1+x)$, ceea ce trebuia demonstrat. Prin urmare P_1 adevărată, $P_k \Rightarrow P_{k+1} \Rightarrow P_n$ este adevărată. Prin urmare $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\frac{e^x(n+1+x)}{e^x(n+x)}=1$.	2p
c)	Studiem întâi existenţa asimptotei orizontale. $\lim\limits_{x\to-\infty}f_0(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\cdot e^x=[-\infty\cdot 0]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\left[-\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\frac{1}{-\infty}=0$ (am folosit teorema lui l'Hospital). Deci $y=0$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei f_0 către $-\infty$. Deoarece graficul funcţiei $f_0(x)$ are asimptotă orizontală nu mai are asimptotă oblică, prin urmare pe aceasta nu o mai studiem.	2p 2p 1p
2. a)	$f'(x)=(\ln(1+x)-x)'=$ $=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$, $\forall x>-1$.	3p 2p
b)	$I_n=\int_0^1\left(\frac{x^n}{2004+x^n}\right)dx=\frac{1}{n}\int_0^1\left(\ln(2004+x^n)\right)'\cdot x\,dx=$ $\frac{1}{n}\ln(2004+x^n)\cdot x\big\vert_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1\ln(2004+x^n)\,dx=\frac{1}{n}\ln\frac{2005}{2004}-\frac{1}{n}\int_0^1\ln(2004+x^n)\,dx$.	2p 3p
c)	Se arată că $I_n=\frac{1}{n}x\ln(1+x^n)\big\vert_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1\ln(1+x^n)\,dx=\frac{1}{n}\ln 2-\frac{1}{n}\int_0^1\ln(1+x^n)\,dx$, deci $n\cdot I_n=\ln 2-\int_0^1\ln(1+x^n)\,dx$. Cum $0\le\ln(1+x^n)\le x^n$, $\forall x>0$, rezultă că $0\le\int_0^1\ln(1+x^n)\,dx\le\frac{1}{n+1}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\ln(1+x^n)\,dx=0$ (s-a aplicat teorema cleştelui) şi atunci $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=\ln 2$.	1p 1p 1p 1p 1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Cristea Maria

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\ln \frac{n(n+1)}{1+2+3+\cdots+n} = \ln \frac{n(n+1)}{\frac{n(n+1)}{2}}$	3p
	$\ln \frac{n(n+1)}{\frac{n(n+1)}{2}} = \ln n(n+1)\cdot\frac{2}{n(n+1)} = \ln 2$	2p
2.	Funcția $f(x) = mx^2 - mx + 2$ admite valoare minimă dacă $m > 0$. Valoarea minimă a funcției este $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{m^2-8m}{4m} = 1 \Leftrightarrow -m^2 + 8m = 4m$	1p 2p
	$-m^2 + 4m = m(-m+4) = 0$ cu soluțiile $m_1 = 0$ și $m_2 = 4$	
	Deoarece $m \in \mathbb{R}^*$ doar $m = 4$ se admite .	2p
3.	Ecuația $\log_3^2 x^2 - \log_{\frac{1}{3}} x = 5$ are sens pentru $x > 0$.	1p
	Ecuația este echivalentă cu $4\log_3^2 x - \log_{3^{-1}} x - 5 = 0 \Leftrightarrow (2\log_3 x)^2 + \log_3 x - 5 = 0$	2p
	Notând $\log_3^2 x = t$ se obține ecuația $4t^2 + t - 5 = 0$ cu soluțiile $t_1 = -\frac{5}{4}$ și $t_2 = 1$ care conduc la ecuațiile $\log_3 x = 1$ cu soluția $x = 3$ și $\log_3 x = -\frac{5}{4}$ cu soluția $x = 3^{-\frac{5}{4}}$, ambele numere sunt soluții ale ecuației inițiale deoarece sunt mai mare decât 0.	1p 1p
4.	Mulţimea A are 6 elemente, deci numărul de submulţimi nevide ale mulţimii A este: $2^6 - 1 = 63$.	2p
	Dintre submulţimile nevide ale mulţimii A există $C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-2)!} = 15$ submulţimi care au	2p

www.mateinfo.ro

	exact 4 elemente. Probabilitatea cerută este: $P=\frac{15}{63}=\frac{5}{21}$.	1p
5.	Vectorii $\vec{v}=2\vec{i}+(m-3)\vec{j}$ și $\vec{u}=(m-8)\vec{i}-3\vec{j}$ sunt coliniari dacă $\frac{2}{m-8}=\frac{m-3}{-3}$, relație echivalentă cu $m^2-11m+24=-6\Leftrightarrow m^2-11m+30=0$ cu soluțiile $m_1=6$ și $m_2=5$.	2p 3p
6.	Din teorema sinusului avem relaţia : $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=2\cdot R\Leftrightarrow\frac{5}{\sin 45^0}=\frac{AB}{\sin 75^0}$. $\sin 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ iar $\sin 75^0=\sin 15^0=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ Deoarece, $\sin^2 15^0=\frac{1-\cos 30^0}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ Deci, $\frac{5}{\sin 45^0}=\frac{AB}{\sin 75^0}\Leftrightarrow\frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{AB}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}\Rightarrow AB=5\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}=\frac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$ cm. Din $\frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\cdot R\Rightarrow R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.	1p 1p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Legea " $*$" este bine definită dacă $\forall x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow x*y\in\mathbb{R}$. Dacă $x,y\in\mathbb{R}$ este evident că $3xy-6x-6y+14\in\mathbb{R}$, deci $x*y\in\mathbb{R}$, prin urmare legea " $*$" este bine definită.	2p 3p
b)	Legea " $*$" se numeşte monoid comutativ dacă: *a*) $\forall x,y\in\mathbb{R}\ x*y=y*x$. *b*) $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\ (x*y)*z=x*(y*z)$. *c*) $\exists e\in\mathbb{R}$ astfel încât $e*x=x*e=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. *a*) Se observă că: $x*y=3xy-6x-6y+14=3x(y-2)-6(x-2)+2=3(x-2)(y-2)+2$, prin urmare	1p 1p

www.mateinfo.ro

	$3(x-2)(y-2)+2=3(y-2)(z-2)+2\Rightarrow x*y=y*x, \forall x,y\in\mathbb{R}$ deci legea " $*$" este comutativă. b) Deducem că $(x*y)*z=[3(x-2)(y-2)+2]*z=3^2(x-2)(y-2)(z-2)+2\ \forall x, y, z\in\mathbb{R}$, iar $x*(y*z)=x*[3(y-2)(z-2)+2]=3^2(x-2)(y-2)(z-2)+2, \forall x, y, z\in\mathbb{R}$, prin urmare $(x*y)*z=x*(y*z)\Rightarrow$ legea " $*$" este asociativă. c) Deoarece legea " $*$" este comutativă prin urmare pentru a afla elementul neutru este suficient să folosim doar relaţia $e*x=x, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$ $3(e-2)(x-2)+2=x\Leftrightarrow 3(e-2)(x-2)-(x-2)=0\Leftrightarrow(x-2)(3e-6-1)=0$. Cum ultima egalitate trebuie să aibă loc oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, rezultă că $3e-7=0\Rightarrow e=\frac{7}{3}\in\mathbb{R}$. Deducem că $e=\frac{7}{3}$ este elementul neutru. Ca urmare a celor stabilite anterior, $(\mathbb{R},*)$ este monoid comutativ.	**1**p 2p
c)	Se deduce cu usurință, deoarece legea " $*$" este asociativă, că : $x*x*x=3^2(x-2)^2+2$ Ecuația $x*x*x=11$ este echivalentă cu $3^2(x-2)^2+2=11\Leftrightarrow 3^2(x-2)^2=9\Leftrightarrow$ $(x-2)^2=1\Leftrightarrow x-2=1$ sau $x-2=-1$, adică $x=3$ sau $x=1$. Deci $S=\{1;3\}$.	**1**p 2p 2p
2. a)	Fie $g(x)$ câtul și $r(x)$ restul împărțirii lui $f(x)$ la x^2-5x+6 . Deoarece grad $(x^2-5x+6)=2$, rezultă că grad$r(x)\leq 1$, de under$(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$. Drept urmare $f(x)=x^n=g(x)\cdot(x^2-5x+6)+r(x)$. $f(x)=x^n=g(x)\cdot(x-3)(x-2)+ax+b$, din $f(3)=0$ și $f(2)=0$ se obține $3a+b=3^n$ și $2a+b=2^n$ cu soluțiile $a=3^n-2^n$ și $b=3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$. Deci $r(x)=(3^n-2^n)\cdot x+3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$, iar $f(x)=(x^2-5x+6)\cdot g(x)+(3^n-2^n)\cdot x+3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$.	**1**p 3p **1**p
b)	Remarcăm că $A^2-(\text{tr}\,A)+\det(A)I_2=O_2$, iar $(\text{tr}\,A)=5$ și $\det(A)=6$, deducem că $A^2-5A+6I_2=O_2$.	3p 2p
c)	Din cele stabilite anterior, deducem că $A^n=(A^2-5A+6)\cdot g(A)+(3^n-2^n)A+(3\cdot 2^n-2\cdot 3^n)I_2$ $=(3^n-2^n)\cdot\begin{pmatrix}-2 & 5\\ -4 & 7\end{pmatrix}+(3\cdot 2^n-2\cdot 3^n)I_2=$	2p 2p **1**p

www.mateinfo.ro

	$=\begin{pmatrix} 5\cdot 2^n-4\cdot 3^n & 5\cdot(3^n-2^n) \\ 2^{n+2}-4\cdot 3^n & 5\cdot 3^n-2^{n+2}\end{pmatrix}$.	

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^n+x^{n-1}+\cdots+x^3+x^2+x+1)}{x-1}=$	3p
	$=x^n+x^{n-1}+\cdots+x^3+x^2+x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.	2p
b)	Se remarcă că $f'_{(x)}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\frac{(n+1)x^n(x-1)-x^{n+1}+1}{(x-1)^2}=$	3p
	$=\frac{nx^{n+2}-nx^n+x^{n+1}-x^n-x^{n+1}+1}{(x-1)^2}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.	2p
c)	În egalitatea de la punctul anterior înlocuind $x=\frac{1}{3}$ deducem	1 p
	$1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^{n-1}}=\frac{\frac{n}{3^{n+1}}-\frac{n+1}{3^n}+1}{\frac{4}{9}}=\frac{n-3n-3+3^{n+1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^2}{4}=\frac{3^{n+1}-2n-3}{3^{n-1}\cdot 4}$, deci	1 p
	$S_n=\frac{3^{n+1}-2n-3}{4\cdot 3^{n-1}}$. Rezultă că	1 p
	$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2n-3}{4\cdot 3^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}\left(9-\frac{2n+3}{3^{n-1}}\right)}{4\cdot 3^{n-1}}=$	2 p
	$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9-\frac{2n+3}{3^{n-1}}}{4}=\frac{9}{4}$.	
2. a)	$I_0=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(x+1)\big\|_0^1=$	3 p
	$=\ln 2-\ln 1=\ln 2$.	2 p
b)	$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x}{1+x}\cdot\left(\frac{x^n}{n}\right)'dx=\frac{x}{1+x}\cdot\frac{x^n}{n}\Big\|_0^1-\int_0^1\frac{x^n}{n}\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)'dx$	2 p
	$\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\int_0^1 x^n\cdot\frac{1+x-x}{(1+x)^2}dx=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}dx$	1 p
	Cum $I_n=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}dx$, deci $nI_n=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}dx$.	2 p

www.mateinfo.ro

c)	Putem observa că $0 \le x \le 1 / (+1) \Leftrightarrow 1 \le x+1 \le 2 \Leftrightarrow 1 \le (x+1)^2 \le 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \frac{1}{(x+1)^2} \le 1$ Prin înmulţirea cu $x^n \ge 0$ şi integrând de la 0 la 1 ultimă inegalitate se obţine $\int_0^1 \frac{x^n}{4} dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^2} dx \le \int_0^1 x^n dx \Leftrightarrow \frac{4}{n+1} \le \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \le \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx = 0$ (s-a folosit teorema cleştelui). Trecând la limită în relația $nI_n = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$ rezultă că $\lim_{n\to\infty} nI_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2}$.	1 p 2 p 2 p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Dogaru Ion

Filiera teoretica,profilul real,specializarea matematica – informatica.
Filiera voctionala,profilul militar,specializarea matematica - informatica

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$x+3\neq 0$ şi $2x-1\neq 0 \Rightarrow x\in \mathbf{R}-\{1/2,-3\}$ $9x^2-12x+4=0$ $x_1=x_2=\frac{2}{3}$	**1p** **3p** **1p**
2.	Termenul din mijlocul dezvoltării este T_7 $T_7=C_{12}^6 a$ $a=503/231$	**1p** **2p** **2p**
3.	Fie M mijl [BC] $\Rightarrow$ M(2,-2) AM: $3x-y-4=0$	**2p** **3p**
4.	$tg\alpha\cdot tg(90^0-\alpha)=1,\forall\alpha\in(0^0,90^0)$ $tg1^0tg2^0\cdots tg89^0=1$	**3p** **2p**
5.	f bijectivă $\Rightarrow S=f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=-3-2-1+0+1+2+3$ $S=0$	**4p** **1p**
6.	$x>0$ $(\lg x+3)(\lg x-10)=0$ $x_1=10^{-3};x_2=1$	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. **a)**	$\det A=-2x,\forall x\in\mathbf{R}$ $x=-1006$	**3p** **2p**
b)	$A^2=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&x^2\end{pmatrix},\forall x\in\mathbf{R}$ $x=\sqrt{2}\Rightarrow A^2=2I_3$ $A^{2k}=2^kI_3,\forall k\in\mathbf{N}^*;$ $A^{2k+1}=2^kA,\forall k\in\mathbf{N}$	**2p** **1p** **1p** **1p**
c)	$\det(t^2A)=-2xt^6,\ \forall x\in\mathbf{R}$ $t^2(t^4-1)=0$ $t_1=0,t_2=-1,t_3=1$	**2p** **1p** **2p**
2. **a)**	$f\in\mathbb{R}[X]$ şi $x=i$ rădăcină $\Rightarrow f(i)=0$ $a=0$; $b=7$	**2p** **3p**
b)	$x_1+x_2+x_3+x_4=0$ $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=9/2$ $(x_1-3/2)^2+(x_2-3/2)^2+(x_3-3/2)^2+(x_4-3/2)^2=0$	**1p** **1p** **3p**
c)	$x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbf{R}$ atunci, folosind punctul **b)**, obţinem $x_1=x_2=x_3=x_4=3/2$ $a=-27$; $b=81/8$	**2p** **3p**

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^3+3x-4}=\pm\infty\Rightarrow G_f$ nu are AO	**1p**
	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$;	**1p**
	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=1$;	**1p**
	y = x + 1 , asmptotă oblică;	**1p**
	f cotinuă pe **R** $\Rightarrow G_f$ nu are AV	**1p**
b)	$x^3+3x^2-4=0\Rightarrow$ f derivabilă pe **R**\{-2,1}	**1p**
	$f'(x)=\dfrac{3x^2+6x}{3\sqrt[3]{(x^3+3x^2-4)^2}},\forall x\in$ **R**\{-2,1}	**2p**
	$f^2(x)\,f'(x)=x^2+2x$, $x\in\ \forall x\in$	**2p**
c)	$\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+2}}$, $\forall x\in$ **R**\{-2}	**3p**
	$f'_s(-2)=\lim\limits_{x\nearrow -2}\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+2}}=+\infty$	**1p**
	$f'_d(-2)=\lim\limits_{x\searrow -2}\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+2}}=-\infty$	**1p**
2. a)	$I=\int_2^3\dfrac{f(x)}{x-1}dx=\int_2^3(x^2+x-2)dx=(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x)\Big\|_2^3$	**3p**
	$I=\dfrac{41}{3}$	**2p**
b)	$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$	**1p**
	$\dfrac{x^2-13}{f(x)}=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{4}{(x-1)^2},\forall x\in[-1,0]$	**2p**
	$\int_{-1}^0\dfrac{x^2-13}{f(x)}dx=-3\ln 2-6$	**2p**
c)	$f'(x)=3x^2-3,\forall x\in$ **R**	**2p**
	$f'(x)=0\Rightarrow x=\pm1$	**1p**
	$f_{min}=f(1)=0$	**1p**
	$f_{max}=f(-1)=4$	**1p**

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Dogaru Ion

Filiera teoretica,profilul real,specializarea matematica – informatica.
Filiera voctionala,profilul militar,specializarea matematica - informatica

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+i)^4=-4$	**2p**

www.mateinfo.ro

	$(1-i)^4 = -4$ $(1+i)^{2012} - (1-i)^{2012} = 0$	**2p** **1p**
2.	$11x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-4}{11}$ $x^2 - 7x = 0$ $x_1 = 0; x_2 = 7$	**1p** **2p** **2p**
3.	$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ $\cos x = ½$ şi $x \in [0, 2\pi] \Rightarrow x = \pi/3$ şi $x = \frac{5\pi}{3}$ $\cos x = -1$ şi $x \in [0, 2\pi] \Rightarrow x = \pi$	**1p** **2p** **2p**
4.	f strict crescătoare $\Rightarrow$ f este injectivă f({1,2,3,4}) are 4 elemente Numărul funcţiilor = $C_6^4 = 15$	**2p** **3p**
5.	Fie M mijl.segmentului [A,B] $\Rightarrow$ M(-1,1) m′ = - 4/3 AM: 4x + 3y – 1 = 0	**1p** **2p** **2p**
6.	$a_3 = a_6 - 3r$ $a_{19} = a_{16} + 3r$ $a_3 + a_{19} = 2012$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. **a)**	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \text{rang}M \geq 2, \forall m \in \mathbf{R}$ $\det M = m^2 - 6m + 5$ $\text{rang}M = 2 \Rightarrow m_1 = 1; m_2 = 5$	**1p** **2p** **2p**
b)	A,B,C necoliniare $\Leftrightarrow \det M \neq 0$ $m \in \mathbf{R} \setminus \{1, 5\}$	**3p** **2p**
c)	$A_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|m^2 - 6m + 5\right\|$ $m^2 - 6m + 5 = (m-3)^2 - 4$ Pentru $m \in [1,5]$, triunghiul ABC are aria maximă dacă $m = 3 \Rightarrow$ Aria max = 2	**1p** **2p** **2p**
2. **a)**	$x,y \in G \Rightarrow 1 + xy > 0$ $x,y \in G \Rightarrow \frac{(x+1)(y+1)}{1+xy} > 0 \Leftrightarrow x * y > -1$ $x,y \in G \Rightarrow \frac{(x-1)(y-1)}{1+xy} < 0 \Leftrightarrow x * y > -1$ $x,y \in G \Rightarrow x * y \in G \Leftrightarrow$ G parte stabilă	**1p** **1p** **1p** **2p**
b)	$f(x * y) = \frac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}, \ \forall x,y \in G$ $f(x)\cdot f(y) = \frac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}, \forall x,y \in G$ $f(x * y) = f(x)\cdot f(y), \ \forall x,y \in G$	**2p** **2p** **1p**
c)	$f(\frac{1}{n}) = \frac{n-1}{n+1}, \forall n \geq 1$ $f(y) = f(\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \cdots * \frac{1}{9}) = f(\frac{1}{2}) \cdot f(\frac{1}{3}) \cdot \cdots \cdot f(\frac{1}{9}) = 1/45$ $\frac{1-y}{1+y} = \frac{1}{45}$	**1p** **2p** **1p**

www.mateinfo.ro

	$y=\frac{1}{2}*\cdots*\frac{1}{9}=\frac{22}{23}$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. **a)**	$f'(x)=\frac{3x^4+x^2+3}{x^2+1},\forall x\in\mathbf{R}$ $f'(x)>0,\forall x\in\mathbf{R}\Rightarrow$ f este strict crescătoare pe **R**	**3p** **2p**
b)	f este strict crescătoare pe **R** $\Rightarrow$ f este injectivă f continuă $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\pm\infty\Rightarrow$ f este surjectivă f este bijectivă	**1p** **1p** **2p** **1p**
c)	$l=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+5arctgx}{x^m}$ Dacă m > 3 atunci l = 0 Dacă m < 0 atunci l = ∞ Dacă m = 3 atunci l = 1	**1p** **1p** **1p** **2p**
2. **a)**	$I_2=e-2I_1$ $I_1=1$ $I_2=e-2$	**2p** **2p** **1p**
b)	$x^ne^x>0$ oricare ar fi $x\in[0,1]\Rightarrow I_n>0$,oricare ar fi $n\in N^*$ $I_{n+1}-I_n=\int_0^1 x^n(x-1)e^x dx<0$ oricare ar fi $n\in N^*\Rightarrow(I_n)_{n>1}$ este strict descrescător $1=I_1\geq I_n>0,\forall n\in\mathbf{N^*}\Rightarrow(I_n)_{n>1}$ este mărginit $(I_n)_{n>1}$ monoton şi mărginit $\Leftrightarrow(I_n)_{n>1}$ convergent.	**1p** **2p** **1p** **1p**
c)	$I_{n+1}=e-(n+1)I_n$, oricare ar fi $n\in\mathbf{N^*}$ $nI_n=e+I_n-I_{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbf{N^*}$ $(I_n)_{n>1}$ convergent $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(I_n-I_{n+1})=0$ $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=e$	**2p** **1p** **1p** **1p**

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Dogaru Ion

Filiera teoretica,profilul real,specializarea matematica – informatica.
Filiera voctionala,profilul militar,specializarea matematica - informatica

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$k=[(\sqrt{5}+\sqrt{11})^2]=16+[2\sqrt{55}]=16+[\sqrt{220}]$ k = 30	**3p** **2p**
2.	y = 7 – x $3x^2-21x+36=0$ $x_1=4\Rightarrow y_1=3$ $x_2=3\Rightarrow y_2=4$	**1p** **2p** **1p** **1p**
3.	$x\in N, x\geq 2$;	**1p**

www.mateinfo.ro

	$2C_x^{x-2} = x(x-1)$ $2x(x-1) = 1524$ $x = 28$	**1p** **2p** **1p**
4.	d = divizor natural al lui 2012 $\Rightarrow$ d $\in \{1,2,4,503\}$ $p = \frac{\text{nr.caz.favorabile}}{\text{nr.caz.posibile}} = \frac{1}{2}$	**2p** **3p**
5.	$\vec{u} + \vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$ $\lvert\vec{u} + \vec{v}\rvert = 5$	**2p** **3p**
6.	$\sin 2x = \frac{2tgx}{1+tg^2x}, \forall x \in \mathbf{R}$ $2tg^2 x + 5tgx + 2 = 0$ $tgx = -2; tgx = -1/2$ $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow tgx = -2$	**2p** **1p** **1p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. **a)**	$A^* = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & -2 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ $A^* \neq O_3 \Rightarrow \text{rang } A^* \geq 1$ A^* are liniile (coloanele) proporţionale rang $A^* = 1$	**1p** **2p** **1p** **1p**
b)	$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 8 & -2 \\ 6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 10 & 20 & -10 \\ 20 & 20 & 0 \\ 10 & 40 & -30 \end{pmatrix} = 10A;$	**3p** **2p**

c)	detA = 0;
	$d_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \text{rangA} = 2;$
	minorul caracteristic $d_c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil;
	Ecuaţia are soluţiile: $X_z = \begin{pmatrix} 5-z \\ z-3/2 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{C}$
		1p
		1p
		1p
		2p

2. **a)**	$a_{100} = 2C_{100}^0 = 2;$ $a_{99} = 0$ $a_{100} + a_{99} = 2$	**2p** **2p** **1p**
b)	$f = (X^2 - 1)g + aX + b, a,b \in \mathbf{C};$ $f(1) = (1+i)^{100} + (1-i)^{100} = f(-1) = -2^{51}$	**1p** **2p**

www.mateinfo.ro

	$a = 0 ; b = 2^{50}$	**2p**
c)	$f(x) = 0 \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{100} = \cos\pi + i\sin\pi$	**1p**
	$x + i = (x - i)(\cos\frac{(2k+1)\pi}{100} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{100}), k \in \{0,1,\ldots,99\}$	**2p**
	Rădăcinile $x_k = ctg\frac{(2k+1)\pi}{200}, k \in \{0,1,...,99\}$ sunt toate reale	**2p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	$f'(x) = -3x^2 + 10x - 3$, $\forall x \in \mathbf{R}$	**1p**
a)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1/3, x_2 = 3$	**2p**
	f este strict crescătoare pe [1/3,3]	**1p**
	f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 1/3]$,respectiv pe $[3, +\infty)$	**1p**
b)	$f''(x) = -6x + 10 \ \forall x \in \mathbf{R}$	**1p**
	$f''(x) = 0 \ \Rightarrow x = 5/3$	**2p**
	f este convexă pe $(-\infty, 5/3]$;	**1p**
	f este concavă pe $[5/3, +\infty)$	**1p**
c)	Folosind punctul **a)** , obţinem x = 1/3 este punct de minim, iar x = 3 este punct de maxim	**1p**
	f(1/3) = m – 13/27 ; f(3) = m+9	**1p**
	f are trei rădăcini reale distincte $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 13/27 < 0 \\ m + 9 > 0 \end{cases}$	**2p**
	$m \in (-9, 13/27)$	**1p**
2.	$f(x) \geq 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow Aria\Gamma_f = \int_0^1 (1-x)^n dx$;	**2p**
a)	$Aria\Gamma_f = (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\Big\|_0^1 = \frac{1}{n+1}$	**3p**
b)	$I_n = \int_0^1 xf(x)dx = (-1)^n \int_0^1 x(x-1)^n dx$	**1p**
	$I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 (x-1)^{n+1} dx$	**2p**
	$I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{(-1)^{n+3}}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \forall n \in \mathbf{N}$	**2p**
c)	$I_n = \int_0^1 f_n(\frac{x}{n})dx = \int_0^1 f_n(\frac{x}{n})dx = (-1)^n \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{n} - 1\right)^{n+1}\Big\|_0^1$;	**2p**
	$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}\left[(\frac{1}{n} - 1)^{n+1} + (-1)^{n+2}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\left[\left(\frac{1}{n} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n + 1\right] = 1 - e$	**3p**

www.mateinfo.ro

$tgC = tg(\pi - A - B) = tg\left[\pi - (A + B)\right] - tg\,(A + B)$ **BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

Varianta 1

Prof: …Gaga Loghin.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{20} = i^{1+2+3+\cdots+20} = i^{\frac{20\cdot 21}{2}} = i^{210}$ $210 = 4 \cdot 52 + 2$ $i^{210} = i^{4\cdot 52+2} = i^2 = -1$	2p 1p 2p
2.	O funcție este injectivă pe un interval dacă este strict monotonă pe acel interval $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ Derivata întâi este pozitivă, strict, deci funcția f(x) fiind strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, adică injectivă	1p 2p 2p
3.	$16^x + 5 \cdot 4^{x+1} - 21 = 0 \Leftrightarrow 4^{2x} + 20 \cdot 4^x - 21 = 0$ Notez $4^x = t; t > 0 \Rightarrow t^2 + 20t - 21 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -21$, care nu corespunde Din $4^x = 1 \Rightarrow 4^x = 4^0 \Rightarrow x = 0$	1p 2p 2p
4.	$p = \frac{c_f}{c_p}$; $c_p = 900$, numărul de numere de câte 3 cifre. Conform enunțului, avem următoarele forme de numere: numere de forma $\overline{aab}$. Numărul de numere de această formă este $9 \cdot 9 = 81$. Numere de forma $\overline{aba}$. Numărul de numere de această formă este $9 \cdot 9 = 81$. Numere de forma $\overline{baa}$. Numărul de numere de această formă este $9 \cdot 9 = 81$. Deci, numărul de cazuri favorabile este $c_f = 81 \cdot 3 = 243$, iar $p = \frac{c_f}{c_p} = \frac{243}{900} = \frac{27}{100} = 0,27$	1p 3p 1p

www.mateinfo.ro

5.	Mediana din vârful A cade pe mijlocul laturii BC. Fie M mijlocul laturii BC. Avem $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2, y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_M & y_M & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-2=0$. Ecuația dreptei AM este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_M & y_M & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-2=0$	2p 3p
6.	$\sin a = \sqrt{1-\cos^2 a} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$ $tg\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{2\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{\sin a}{1+\cos a} = 3$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det M = m+m-1-m^2 = -m^2+2m-1 = -\left(m^2-2m+1\right) = -(m-1)^2$	5pp
b)	Pentru $m=1 \Rightarrow rangM = 2$. Necunoscute principale: y, z; necunoscuta secundară $x = a \in \mathbb{R}$. Ecuații principale: primele două. Sistemul devine $\begin{cases} y+z = 3-a \\ y = -1-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 4 \\ y = -1-a \end{cases} \Rightarrow S\{a, -1-a, 4\}$	3p 2p
c)	Sistemul este incompatibil dacă rangul matricei sistemului este $\neq$ de rangul matricei extinse. Pentru $m \neq 1 \Rightarrow rangM = 3$. Fie matricea extinsă $\overline{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ m & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ $d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = 0-1+3m-0-3+m = 4m-4 = 4(m-1) \neq 0$	1p 2p 2p

www.mateinfo.ro

	$d_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & m & 3\end{vmatrix}=0-1+3m-0-3+m=4m-4=4(m-1)\neq 0$, deci rang $\overline{M}$ =3 și sistemul este compatibil, $\forall m\in\mathbb{R}$.	
2. a)	$x*y=2xy-4x-4y+8+5a-8=2x(y-2)-4(y-2)+5a-8=$ $=2(x-2)(y-2)+4(a-2)+a>a,\ \forall a>2$	5p
b)	Se verifică imediat că operația este corect definită, că este asociativă și comutativă. Elementul neutru este unic și avem: $x*e=x\Rightarrow 2xe-4x-4e+5a=x\Leftrightarrow 2e(x-2)=5(x-a)\Rightarrow a=2$ și $e=\frac{5}{2}$ Elementul simetrizabil se verifică imediat	2p 3p
c)	f este bijectivă, fiind funcție de gradul I, strict crescătoare. Verificăm relația $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$ $f(x*y)=2(2xy-4x-4y+10)-4=4xy-8x-8y+16$ $f(x)\cdot f(y)=(2x-4)\cdot(2y-4)=4xy-8x-8y+16$ $f(x*y)=2(2xy-4x-4y+10)-4=4xy-8x-8y+16$ $f(x)\cdot f(y)=(2x-4)\cdot(2y-4)=4xy-8x-8y+16$ Deci grupurile $(G,*)$ și $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ sunt izomorfe.	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x+1)^2}=\frac{4x}{(x+1)^2}$ $f''(x)=\frac{4(x+1)^2-8x(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{4(x+1)(x+1-2x)}{(x+1)^4}=\frac{4(1-x)}{(x+1)^3}$	2p 3p
b)	Monotonia depinde de semnul derivatei I. Pentru $x\geq 0$ f(x) este crescătoare; pentru $x<0$, f(x) este descrescătosre	2p

www.mateinfo.ro

	Determinăm semnul derivatei a doua şi obţinem:	2p
	pentru $x\in(-\infty,-1)\cup[1,\infty)$, $f''(x)\le 0\Rightarrow$ f(x) este concavă;	
	pentru $x\in(-1,1)$, $f''(x)>0\Rightarrow$ f(x) este convexă	1p
c)	$g(x^k)=f(x^k)+f\left(\frac{1}{x^k}\right)=\frac{x^{2k}-1}{x^{2k}+1}+\frac{\frac{1}{x^{2k}}-1}{\frac{1}{x^{2k}}+1}=\frac{x^{2k}-1}{x^{2k}+1}+\frac{1-x^{2k}}{x^{2k}+1}=0$	3p
	$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)+g(x^2)+\cdots+g(x^{2011})+x^{2013}}{x^{2012}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^{2013}}{x^{2012}}=\lim\limits_{x\to 2}x=2$	2p
2. a)	$I_0=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=arctgx\Big\|_0^1=\frac{\pi}{4}$	2p
	$I_1=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{u'}{u}dx=\frac{1}{2}\ln\lvert u\rvert\Big\|_0^1=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big\|_0^1=\frac{\ln 2}{2}$	3p
b)	Fie $\forall x\in[0,1]\Rightarrow x^n\ge x^{n+1}$. Deoarece $\Rightarrow\frac{x^n}{x^2+1}\ge\frac{x^{n+1}}{x^2+1}\Rightarrow\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx\ge\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx\Rightarrow I_n\ge I_{n+1}$	2p
	$I_n+I_{n+2}=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{x^{n+2}}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^n(x^2+1)}{x^2+1}dx=\int_0^1x^ndx=\frac{1}{n+1}$	1p
	$\frac{1}{n+1}=I_n+I_{n+1}\le 2I_n\Rightarrow I_n\ge\frac{1}{2(n+1)}$ $\frac{1}{n-1}=I_n+I_{n-2}\ge 2I_n\Rightarrow I_n\le\frac{1}{2(n+1)}$ $\Rightarrow\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{2(n-1)}$, $n\ge 2$	2p
c)	$\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{2(n-1)}\Big\lvert\cdot n\Rightarrow\frac{n}{2(n+1)}\le nI_n\le\frac{n}{2(n-1)}\Big\lvert-\frac{1}{3}$ $\Rightarrow\frac{n}{2(n+1)}-\frac{1}{3}\le nI_n-\frac{1}{3}\le\frac{n}{2(n-1)}-\frac{1}{3}$	2p

www.mateinfo.ro

	$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2(n+1)}-\frac{1}{3}\right]\le\lim\limits_{n\to\infty}\left(nI_n-\frac{1}{3}\right)\le\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2(n-1)}-\frac{1}{3}\right]$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-2}{6(n+1)}\le\lim\limits_{n\to\infty}\left(nI_n-\frac{1}{3}\right)\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{6(n+1)}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(nI_n-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$	3p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Gaga Loghin.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$b_3 = \sqrt{b_2 \cdot b_4} = \sqrt{7 \cdot 28} = 14$	2p
	$q = \frac{b_3}{b_2} = \frac{14}{7} = 2$;	2p
	$2 = \frac{7}{b_1} \Rightarrow b_1 = \frac{7}{2}$	1p
2.	$f(1) = 5^1 + \log_5 1 = 5$	2p
	$f(f(1)) = f(5) = 5^5 + 1 = 3126$	3p
3.	În binomul $(a+b)^n$, termenul T_{k+1} se scrie $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$	1p
	$\Rightarrow T_{k+1} = C_9^k \left(2012 \cdot \sqrt[4]{x}\right)^{9-k} \left(\frac{2012}{\sqrt{x}}\right)^k$, $9 \geq k \Rightarrow k \in \{0,1,\cdots,9\}$	1p
	$T_{k+1} = C_9^k 2012^{9-k} \cdot x^{\frac{9-k}{4}} \cdot 2012^k \cdot x^{-\frac{k}{2}} = 2012^9 \cdot x^{\frac{9-k}{4}-\frac{k}{2}}$. Trebuie să avem $\frac{9-k}{4} - \frac{k}{2} = 0 \Leftrightarrow 9-3k = 0 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow T_4 = 2012^9$	2p 1p
	$\frac{9-k}{4} - \frac{k}{2} = 0 \Leftrightarrow 9-3k = 0 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow T_4 = 2012^9$	
4.	$p = \frac{c_f}{c_p}$; $c_p = 3^3 = 27$.	1p
	Numărul de cazuri favorabile este $3 \cdot 2 \cdot 1$, deci $c_f = 6$, iar	2p

www.mateinfo.ro

	$p=\frac{c_f}{c_p}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}=0,(2)$	2p
5.	Centru paralelogramului se găsește la intersecția diagonalelor AC și BD. Fie O acest centru. Atunci $x_O=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-2+2}{2}=0;\ y_O=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}$ $x_O=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-2+2}{2}=0;\ y_O=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}$ $x_O=\frac{x_B+x_D}{2}=\frac{3+n}{2}=0\Rightarrow n=-3\Rightarrow D(-3,5);$ $y_O=\frac{y_B+y_D}{2}=\frac{m+5}{2}=\frac{7}{2}\Rightarrow m=2\Rightarrow B(3,2)$	2p 1p 2p
6.	$tgC=tg(\pi-A-B)=tg\left[\pi-(A+B)\right]-tg(A+B)$ $tg(A+B)=\frac{tgA+tgB}{1-tgA\cdot tgB}=\frac{2+\frac{8-5\sqrt{3}}{11}}{1-2\cdot\frac{8-5\sqrt{3}}{11}}=\frac{22+8-5\sqrt{3}}{11-16+10\sqrt{3}}=$ $=\frac{5\left(6-\sqrt{3}\right)}{-5\left(1-2\sqrt{3}\right)}=-\frac{\left(6-\sqrt{3}\right)\left(1+2\sqrt{3}\right)}{-11}=\frac{6+12\sqrt{3}-\sqrt{3}-6}{11}=\sqrt{3}$ $tgC=\sqrt{3}\Rightarrow\hat{C}=\frac{\pi}{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $A^3-A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=A^2-I_3$	5p
b)	Prin inducție. Egalitatea se verifică, conform punctului a). Presupun că $P(n):A^n-A^{n-2}=A^2-I_3$ $P(n+1):$ și demonstrez $A^{n+1}-A^{n-1}=A\left(A^n-A^{n-2}\right)=A\left(A^2-I_3\right)=A^3-A=A^2-I_3$	2p

www.mateinfo.ro

	$P(n+1): A^{n+1}-A^{n-1}=A^2-I_3$. Într-adevăr, avem: $A^{n+1}-A^{n-1}=A\left(A^n-A^{n-2}\right)=A\left(A^2-I_3\right)=A^3-A=A^2-I_3$, conform a)	2p
c)	Obsevăm că se verifică pentru n=1. Presupunem adevărată pentru pentru valorile mai mici și egale cu n-1 și demonstrăm pentru n. notăm cu S_n suma elementelor. Din $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3\Rightarrow A^n=A^{n-2}+A^2-I_3\Rightarrow S_n=n-2+3+2+3-3=n+3$ $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3\Rightarrow A^n=A^{n-2}+A^2-I_3$ $\Rightarrow S_n=n-2+3+2+3-3=n+3$	2p 2p
2. a)	$x*y=2xy-4x-4y+8+5a-8=2x(y-2)-4(y-2)+5a-8=$ $=2(x-2)(y-2)+4(a-2)+a>a,\ \forall a>2$	5p
b)	Se verifică imediat că operația este corect definită, că este asociativă și comutativă. Elementul neutru este unic și avem: $x*e=x\Rightarrow 2xe-4x-4e+5a=x\Leftrightarrow 2e(x-2)=5(x-a)\Rightarrow a=2$ și $e=\frac{5}{2}$ Elementul simetrizabil se verifică imediat	2p 3p
c)	f este bijectivă, fiind funcție de gradul I, strict crescătoare. $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$ Verificăm relația $f(x*y)=2(2xy-4x-4y+10)-4=4xy-8x-8y+16$ $f(x)\cdot f(y)=(2x-4)\cdot(2y-4)=4xy-8x-8y+16$ $f(x*y)=2(2xy-4x-4y+10)-4=4xy-8x-8y+16$ $f(x)\cdot f(y)=(2x-4)\cdot(2y-4)=4xy-8x-8y+16$ Deci grupurile $(G,*)$ și $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ sunt izomorfe.	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

www.mateinfo.ro

1. a)	$f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{x+3}{3-x}\right)'}{\dfrac{x+3}{3-x}}=\dfrac{3-x+x+3}{(3-x)^2}\cdot\dfrac{3-x}{x+3}=\dfrac{6}{9-x^2}>0,\forall x\in(-3,3)$ Deci $f(x)$ este strict crescătoare pentru $x\in(-3,3)$	3p 2p
b)	1. asimptote orizontale nu există, pentru că nu se pune problema calculului limitei la $\pm\infty$; 2. asimptote oblice, nu există; din aceleași rațiuni ($x\in(-3,3)$) 3. asimptote vericale: $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}}\ln\dfrac{x+3}{3-x}=\ln 0=-\infty$. Deci $x=-3$ este asimptotă verticală la dreapta. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}\ln\dfrac{x+3}{3-x}=\ln\infty=\infty$. Deci $x=3$ este asimptotă verticală la stânga.	1p 1p 3p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty}xf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\dfrac{\frac{1}{x}+3}{3-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\dfrac{3x+1}{3x-1}=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^x=1^\infty$ $\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^x=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3x+1}{3x-1}-1\right)^x=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3x+1-3x+1}{3x-1}\right)^x=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x-1}\right)^x$ $=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{3x-1}{2}}\right)^{\frac{3x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{3x-1}}=\ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{3x-1}}=\ln e^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}$ $=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{3x-1}{2}}\right)^{\frac{3x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{3x-1}}=\ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{3x-1}}=\ln e^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}$	2p 3p
2. a)	$I_0=\int_0^1\dfrac{\ln 2}{x^2+1}dx=\ln 2\cdot\int_0^1\dfrac{1}{x^2+1}dx=\ln 2\cdot arctgx\Big\vert_0^1=\dfrac{\pi}{4}\cdot\ln 2$	5p

www.mateinfo.ro

b)	Deoarece $x\in(0,1)\Rightarrow x^n>x^{n+1}$, iar $\frac{1}{x^2+1}>0$ $\Rightarrow \frac{\ln\left(x^n+1\right)}{x^2+1}>\frac{\ln\left(x^{n+1}+1\right)}{x^2+1}, \forall x\in(0,1)\Rightarrow I_n>I_{n+1}\Rightarrow$ $\Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln\left(x^n+1\right)}{x^2+1}dx>\int_0^1 \frac{\ln\left(x^{n+1}+1\right)}{x^2+1}dx, \forall x\in(0,1)\Rightarrow I_n>I_{n+1}\Rightarrow$ șirul este descrescător.	2p 3p
c)	$0\le I_n=\int_0^1 \frac{\ln\left(x^n+1\right)}{x^2+1}dx\le\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx\le\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$	5p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Ionescu Maria

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	S= 5+10+15+...+95=5(1+2+3+...+19)=	3p
	=5(19*20)/2=950	2p
2.	Se scrie ecuaţia $3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3 + 3^x = 117$	1p
	$3^x(9+3+1) = 117 \Rightarrow 3^x \cdot 13 = 117$	2p
	$3^x = 9 \Rightarrow x = 2$	2p
3.	$T_{k+1} = C_{20}^k \left(\sqrt[3]{2}\right)^k = C_{20}^k 2^{\frac{k}{3}}$	2p
	$k \in \{0,3,6,...18\}$	2p
	7 termeni raţionali	1p
4.	$P = \frac{nr.cazuri\ favorabile}{nr.cazuri\ posibile}$	1p
	Numerele posibile: $\overline{abc}$: 3*4*4=48	1p
	Numere favorabile: $\overline{abc}$: 3*4*2=24	1p
	$P = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$	2p
5.	$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} = -\frac{2}{m} \neq -\frac{5}{2}$	2p
	$m = -\frac{8}{3}$	3p

www.mateinfo.ro

6.	Fie M mijlocul segmentului [BC] $\Rightarrow M\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)\Rightarrow M(0,2)$	2p
	$AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}\Rightarrow AM=\sqrt{4^2+1^2}$	2p
	$AM=\sqrt{17}$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$C(-1,1)$	1p
	$AC:\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 3 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$	2p
	$AC: x-4y+5=0$	2p
b)	A,B,C coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=0$	1p
	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ -n & n & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow n+13=0$	3p
	$n=-13\notin N^*\Rightarrow$ A,B,C nu pot fi coliniare, $\forall n\in N^*$	1p
c)	$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{matrix}\right\|$	1p
	$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 3 & 2 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ -n & n & 1\end{matrix}\right\|=10\Leftrightarrow \lvert n+13\rvert=20$	2p
	$n=7$	2p
2. a)	Asociativitatea: $(x*y)*z=x*(y*z),\forall x,y,z\in R$	1p
	Demonstrarea asociativităţii	4p

www.mateinfo.ro

b)	Comutativitatea legii	1p
	Calculul elementului neutru $e=1$	2p
	Calculul $x'*2=2*x'=1\Rightarrow x'=\frac{6}{7}$	2p
c)	Folosim $x*y=6\left(x-\frac{5}{6}\right)\left(y-\frac{5}{6}\right)+\frac{5}{6}$	
	$x*x*x=6^2\left(x-\frac{5}{6}\right)^3+\frac{5}{6}$. Ecuaţia devine pentru $x-\frac{5}{6}=t$	2p
	$36t^3-t=0$ cu soluţiile $t\in\left\{0,\pm\frac{1}{6}\right\}$	2p
	$x\in\left\{\frac{4}{6},\frac{5}{6},1\right\}$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+2}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}$	2p
	$\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-6x}{1}=-3$	3p
b)	Calculul $f'(x)=3x^2-6x$	1p
	$f'(x)=0\Rightarrow x\in\{0,2\}$	2p
	Tabelul de variaţie şi finalizarea	3p
c)	$f(0)=2-m, f(2)=-2-m$	2p
	Şirul lui Rolle pentru $m\in(-2,2)\Rightarrow -,+,-,+$	2p
	3 soluţii reale	1p

www.mateinfo.ro

2. a)	$I_1=\int_0^1 \frac{x}{x+2014}dx=\int_0^1 \frac{x+2014-2014}{x+2014}dx=$	1p
	$\int_0^1 1dx-2014\int_0^1 \frac{1}{x+2014}dx=\left(x-2014\ln\lvert x+2014\rvert\right)\Big\rvert_0^1=$	3p
	$1-2014\ln\frac{2015}{2014}$	1p
b)	$I_{n+1}+2014I_n=\int_0^1 \frac{x^{n+1}+2014x^n}{x+2014}dx=$	2p
	$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\rvert_0^1=\frac{1}{n+1},\forall n\in N^*$	3p
c)	$I_{n+1}-I_n<0$	1p
	$\frac{1}{2015(n+1)}<I_n<\frac{1}{2015n}$	2p
	$\lim_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{2015}$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Ionescu Maria

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=1+i+i^2+...+i^{10}=1+i-1-i+1+i-1-i+1+i-1=i$	3p
	$\lvert z\rvert=\sqrt{0^2+1^2}=1$	2p

www.mateinfo.ro

2.	$\Delta < 0$ $m^2 - 36 < 0$ $m \in (-\infty, -6) \cup (6, \infty)$	1p 2p 2p
3.	Condiţii de existenţă: $\begin{matrix} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow x \in \{1\} \cup [3, \infty)$ $x^2 - 4x + 3 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x = 1$ soluţie	2p 3p
4.	$P = \dfrac{nr.\,cazuri\ \ favorabile}{nr.\,cazuri\ \ posibile}$ Numere posibile: 11 Numere favorabile: 0,1,2,3,4 $P = \dfrac{5}{11}$	1p 1p 1p 2p
5.	$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow 2 \cdot a + (-3) \cdot 6 = 0$ $m = 9$	3p 2p
6.	$\sin 75^\circ - \sin 15^\circ = 2 \sin 30^\circ \cos 45^\circ =$ $= 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -(m+2)(m-1)^2$ $m \in \{-2, 1\}$	1p 2p 2p
b)	Sistemul devine: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \\ y + z = 3 \end{cases}$ sau $\det A = -2$ Obţinem soluţia: $x = 0, y = 1, z = 2$	1p 4p

www.mateinfo.ro

c)	$\det A \neq 0 \Rightarrow m \in R/\{-2,1\} \Rightarrow rangA = 3$ Dacă $\det A = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow rangA = 1$ $\Rightarrow m = -2 \Rightarrow rangA = 2$	2p 1p 2p
2. a)	$a \in Z_4, b \in Z_4$ Se pot forma 16 polinoame	2p 3p
b)	$f = X^3 + \hat{2}X + \hat{2}$ Restul este $f\left(\hat{2}\right) = \hat{2}^3 + \hat{2}\cdot\hat{2} + \hat{2} =$ $= \hat{2}$	1p 2p 2p
c)	$f\left(\hat{0}\right) = \hat{1}$ $f\left(\hat{1}\right) = \hat{2} + a$ $f\left(\hat{2}\right) = \hat{0} + \hat{2}a + \hat{1}$ $f\left(\hat{3}\right) = \hat{3} + \hat{3}a + \hat{1} = \hat{3}a$ $a \in \left\{\hat{1}, \hat{3}\right\}$	1p 1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \frac{-2014}{(x-2014)^2}$ $f'(x) < 0, \forall x \in R/\{2014\}$ f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$	2p 2p 1p
b)	$x = 2014$ asimptotă verticală $y = 1$ asimpotă orizontală	2p 3p

www.mateinfo.ro

c)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-2014}\right)^x\overset{1^\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2014}{x-2014}\right)^x$	2p
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2014}{x-2014}\right)^{\frac{x-2014}{2014}}\right]^{\frac{2014x}{x-2014}}=e^{2014}$	3p
2.	g este derivabilă pe $(0,\infty)$	1p
a)	$g'(x)=f(x),\forall x\in(0,\infty)$	3p
	Concluzia	1p
b)	$\int_1^e f(x)\bullet g(x)\,dx=\int_1^e g'(x)\bullet g(x)\,dx=$	1p
	$=\frac{g^2(x)}{2}\Big\vert_1^e=$	2p
	$=\frac{e^2}{2}$	2p
c)	$x\in[1,e]\Rightarrow 1\le f(x)\le 2$	2p
	Concluzia	3p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Ionescu Maria

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{2}=\log_{2^{-2}}2^{\frac{1}{3}}=-\frac{1}{6}$ $\left(\sqrt{6}\right)^{-2}=\frac{1}{6}$ Rezultat final: 0	2p 2p 1p
2.	Fie $f:R\to R, f\left(x\right)=ax^2+bx+c; a\neq 0, a,b,c\in R$ $f\left(x\right)=-9x^2+12x-4$ şi $f\left(x\right)=-x^2+4x-4$	3p 2p
3.	Condiţie de existenţă: $x>0$ $\lg^2 x^2-20\lg x+24=0\Leftrightarrow 4\lg^2 x-20\lg x+24=0$ devine $t^2-5t+6=0, t=\lg x$ cu rădăcinile: 2,3 $x\in\{100,1000\}$	1p 2p 2p
4.	$P=\frac{nr.\,cazuri\ favorabile}{nr.\,cazuri\ posibile}$ Numere posibile: 100,...,999 $\Rightarrow$ 900 numere Numere favorabile: 116,161,611,123,132,213,231,312,321 $\Rightarrow$ 9 numere $P=\frac{9}{900}=\frac{1}{100}$	1p 1p 2p 1p
5.	Demonstraţia : triunghiul ABC este dreptunghic $h_C=d\left(C,AB\right)=\frac{12}{5}$	2p 3p
6.	$\cos 2x=1-2\sin^2 x=$ $=1-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$	2p 6p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=8, trA=6$ $A^2-6A+8I_2=O_2$ sau calculul cu matrice	2p 3p

www.mateinfo.ro

b)	Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .Calculul $A\cdot X$ şi $X\cdot A$ Rezolvarea sistemului şi soluţia: $X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a+2c \end{pmatrix}$	2p 3p
c)	Fie $Y=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Obţinem sistemul $\begin{cases} a^2+bc=2 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=1 \\ bc+d^2=4 \end{cases}$ Obţinem $a=\pm\sqrt{2}, b=0, c=\frac{1}{a+d}$ şi $d=\pm 2 \Rightarrow 4$ soluţii	2p 3p
2. a)	$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{b}{a}$ $=0$	2p 3p
b)	Notăm $x^2=t$ şi obţinem $t\in\{1,2013\}$ $x\in\left\{\pm 1,\pm\sqrt{2013}\right\}$	3p 2p
c)	$(x_1+2)(x_2+2)(x_3+2)(x_4+2)=f(-2)$ $f(-2)=-6027$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}, \forall x\in R$ Din tabelul de variaţie f este strict descrescătoare pe $(-\infty,0)$ şi este strict crescătoare pe $(0,\infty)$	2p 3p
b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$ $f(1)=\ln 2; f'(1)=1$ $x-y-1+\ln 2=0$	1p 2p 3p

www.mateinfo.ro

c)	$f''(x)=\dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2},\forall x\in R$ Tabelul de variaţie Puncte de inflexiune : $A(-1,\ln 2);B(1,\ln 2)$	2p 1p 2p
2. a)	$\int_{11}^{102} f\left(\sqrt{x}\right)dx=\int_{11}^{102}\sqrt{x+2014}dx$ $=\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{x+2014}\right)^3\Big\vert_{11}^{102}$ $=\dfrac{2}{3}\left(46^3-45^3\right)$	1p 2p 2p
b)	$\int_1^{11}\dfrac{x}{f^2(x)}dx=\int_1^{11}\dfrac{x}{x^2+2014}dx$ $\int_1^{11}\dfrac{x}{f^2(x)}dx=\dfrac{1}{2}\ln\left\vert x^2+2014\right\vert\Big\vert_1^{11}=\ln\dfrac{45}{\sqrt{2015}}$	2p 3p
c)	Primitiva F a funcţiei f este strict crescătoare pe $R\Leftrightarrow F'(x)>0,\forall x\in R$ $F'(x)=f(x)>0,\forall x\in R$	2p 3p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof:Isofache Cătălina,C.N.Al.I.Cuza Ploieşti

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(\frac{2}{1-i}\right)^{10}=32i$	3p
	a=0 şi b=32	2p
2.	Funcţia este strict descrescătoare pe $(-\infty;x_v]$ şi strict crescatoare pe $[x_v;\infty)$	1p
	$x_v=-\frac{b}{2a}\Rightarrow x_v=-3$	2p
	$m=-3$	2p
3.	$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+....\frac{1}{5^{12}}=\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{13}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{13}\right)<\frac{5}{4}.$	1p 2p 2p
4.	$T_{k+1}=C_9^k(x^2)^{9-k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k$; k=$\overline{0;9}$ .Rezultă $T_{k+1}=C_9^k x^{18-\frac{7k}{3}}$.	3p
	$18-\frac{7k}{3}=4\Rightarrow k=6$ .Deci T_7.	2p
5.	n=12k+r ; r=$\overline{0;11}$.Rezultă $\cos\frac{n\pi}{6}=\cos\left(2k+\frac{r\pi}{6}\right)=\cos\frac{r\pi}{6}$.	2p
	$\cos\frac{r\pi}{6}=\cos\left(2\pi-\frac{r\pi}{6}\right)$; $2\pi-\frac{r\pi}{6}=\frac{(12-r)\pi}{6}$	2p
	Deci pentru $r=\overline{0;6}$ obţinem valori diferite.Rezultă mulţimea are 7 elemente.	1p

www.mateinfo.ro

6.	AB=$\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$,rezultă AB=$2\sqrt{5}$;AC=$4\sqrt{5}$;BC=10. Din reciproca teoremei lui Pitagora obţinem triunghiul ABC dreptunghic în A. M$\left(\frac{x_B+x_c}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$.Deci M(- 1;7)	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	A=$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ este matricea sistemului. Minorul $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Deci rangA=3	2p 2p 1p
b)	RangA=rang $\overline{A}$,rezultă sistem compatibil simplu nedeterminat. x=1;y=0;t=α ;z=$-\alpha$; $\alpha\in C$.	3p 2p
c)	A=$I_3\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\\alpha&\beta&\gamma\\-\alpha&-\beta&1-\gamma\end{pmatrix}$ $\alpha;\beta;\gamma\in C$ .Rezultă o infinitate de soluţii. FieY=$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\m&n&p\\q&r&s\end{pmatrix}$.Sistemul de ecuaţii: $\begin{cases}q=0\\q+r=0\\q+r+s=0\\q+r+s=1\end{cases}$.Contradicţie.Deci ecuaţia nu are soluţie.	3p 2p
2. a)	f=qg+r , grad r < grad g q=x^4-x^3+2x-2 si r =3	2p 3p
b)	$y_1^{\,3}=1$,rezultă $S_1=6$. $S_2=\sum_{k=1}^{6}(x_k^{\,2}+x_k+1)=\sum_{k=1}^{6}x_k^{\,2}+\sum_{k=1}^{6}x_k+\sum_{k=1}^{6}1=(x_1+x_2+...+x_6)^2-2(x_1x_2+...+x_5x_6)+$	3p 2p

www.mateinfo.ro

	$(x_1+x_2+...+x_6)+6.$ Din relaţiile lui Viete obţinem $\sum_{k=1}^{6} x_k = 0$ si $\sum_{\substack{i;j=1 \\ i<j}}^{6} x_i x_j = 0$. Deci $S_2 = 6$	
c)	Notăm $x^3 = t$ si obţinem ecuaţia $t^2+t+1=0$ $\Delta < 0$ rezultă că ecuaţia nu are soluţii reale. Deci polinomul f are 0 rădăcini reale.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	f'(x)=$\frac{1}{\sqrt{x}}$; x>0 f''(x)=$-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ <0 Rezultă f' este strict descrecătoare pe $(0;\infty)$.	2p 2p 1p
b)	Aplicăm teorema lui Lagrange pentru funcţia f pe intervalul [k;k+1] şi rezultă c$\in (k;k+1)$ astfel incât f(k+1)-f(k)= $f'(c)$. f'(c)=$\frac{1}{\sqrt{c}}$ f(k+1)-f(k)=$\frac{1}{\sqrt{c}}$.	1p 2p 1p 1p
c)	$b_{n+1}-b_n<0$,rezultă şirul $(b_n)_{n\in N^*}$ este descrescător.Din teorema lui Lagrange rezultă inegalitatea: $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{k}}$ .Insumând inegalitaţile pentru k=$\overline{1;n}$, obţinem $b_n \geq -1$,deci şirul $(b_n)_{n\in N^*}$ este mărginit.Rezultă $(b_n)_{n\in N^*}$ este convergent. Din $a_n > 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{1}$ si trecerea la limită in inegalitate,rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.	1p 1p 1p 2p

www.mateinfo.ro

2. a)	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 x dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big\|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{4}.$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{x}dx=(\ln x)\Big\|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\ln 2.$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)dx=\frac{\pi}{4}+\ln 2.$	2p 2p 1p
b)	Funcţia h(x)= $\sin^{2011} x$; x∈ $[-\pi;\pi]$ este impară, rezultă $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2011} x dx=0.$ Funcţia $g^{(2012)}(x)$;x∈ $[-\pi;\pi]$ este impară,deci $\int_{-\pi}^{\pi}g^{(2012)}(x)dx=0$	3p 2p
c)	$t^2\sin^2 x-2t\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{x^2}\geq 0\,;\forall x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right];\forall t\in R.$ Prin aplicarea integralei $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ obţinem inegalitatea cerută.	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof:Isofache Cătălina,C.N.Al.I.Cuza Ploieşti

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left\|(2+i)^{10}\right\|=\left\|2+i\right\|^{10}$	3p

www.mateinfo.ro

	$\lvert 2+i\rvert=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,rezultă $\left(\sqrt{5}\right)^{10}=5^5$.	2p
2.	$\sqrt{50}=7{,}07....$ Produsul primelor 10 zecimale este egal cu zero.	3p 2p
3.	$4^{x^2}=2^{6x}\Leftrightarrow 2^{2x^2}=2^{6x}$ $2x^2=6x\Leftrightarrow x_1=3; x_2=0$	2p 3p
4.	I)f(b)=1;f(c)=1; II) f(b)=1;f(c)=2 ; III) f(b)=2;f(c)=1 Rezultă 3 funcţii.	3p 2p
5.	cosB=$\frac{1}{3}\Rightarrow \sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$;cosC=$\frac{1}{2}\Rightarrow$ sinC=$\frac{\sqrt{3}}{2}$. cos(B+C)=cosBcosC-sinBsinC=$\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$. cosA=cos(180^0−(B+C))=−cos(B+C)=$\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$.	2p 2p 1p
6.	G$\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)\Rightarrow$ G(2;2).	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^3=I_3$ $A^{-1}=A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.	3p 2p
b)	A(XY)=(AX)Y=(XA)Y=X(AY)=X(YA)=(XY)A Rezultă că XY∈ $G(A)$.	3p 2p

www.mateinfo.ro

c)	Dacă $X\in G(A)\Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.	2p
	$X^2=I_3\Rightarrow X=\pm I_3;\pm\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix};X=\pm\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \pm 1\pm i\sqrt{3} & \pm 1\mp i\sqrt{3} \\ \pm 1\mp i\sqrt{3} & 1 & \pm 1\pm i\sqrt{3} \\ \pm 1\pm i\sqrt{3} & \pm 1\mp i\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.	3p
2.	$(x\circ y)\circ z=(x+i)(y+i)(z+i)-i$	2p
a)	$x\circ(y\circ z)=(x+i)(y+i)(z+i)-i$	1p
	Rezultă că $x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ z$.	1p
b)	$x\circ(-i)=(-i)\circ y=-i$	3p
	$[(-100i)\circ(-99i)\circ....\circ](-i)\circ[0\circ i\circ(2i)\circ...\circ(99i)\circ(100i)]=x\circ(-i)\circ y=-i$	2p
c)	$x\circ x\circ x\circ x=(x+i)^4-i$.	2p
	Obţinem ecuaţia $(x+i)^4=1$ cu soluţiile $x_{1;2}=\pm 1-i;x_3=0;x_4=-2i$.	3p

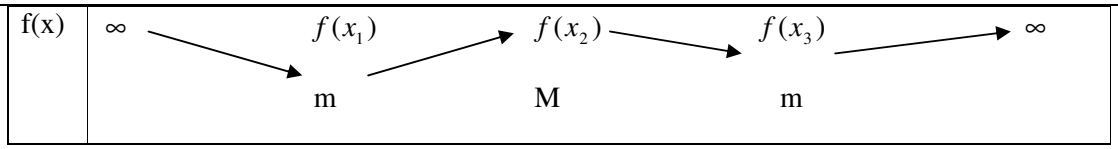
SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	f(x)=0 $\Leftrightarrow x_1=1;x_2=2;x_3=3;x_4=4$ .Deci , ecuaţia are 4 soluţii reale.	2p
	f(x)=$\left(x^2-5x+5\right)^2-1$	1p
	f'(x)=$2(2x-5)(x^2-5x+5)$	1p
	f'(x)=0 $\Leftrightarrow x_1=\frac{2}{5};x_{2;3}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ .Deci ecuaţia are 3 soluţii reale.	1p
b)		

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
f'(x)	- - - - - - - - - - -	0 + + + + + +	0 - - - - - - - -	0 + + + + + + + + + + +	

2p

www.mateinfo.ro

	 Funcţia f are 3 puncte de extrem local.	2p 1p
c)	$f(x_1)=\frac{104\cdot 54}{25^2}$; $f(x_3)=-1$ Valoarea minimă a funcţiei f este -1.	3p 2p
2. a)	$f_1(x)=e^x-x-1;x\in R$ $f_2(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-x-1;x\in R$.	2p 3p
b)	Verificarea formulei pentru n=1 Presupunem că $f_{k+1}(x)=e^x-\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}-...-\frac{x^k}{k!}-1, k\in N^*$.Aplicăm $\int_0^x f_{k+1}(t)dt$ şi obţinem $f_{k+2}(x)=e^x-\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}-...-\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}-1$.	1p 2p 2p
c)	Demonstrăm prin inducţie matematică inegalitatea $0\le f_n(x)\le e^x\cdot\frac{x^n}{n!}, \forall n\in N$. Trecem la limită în inegalitate şi rezultă $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x$.	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof:Isofache Cătălina,C.N.Al.I.Cuza Ploieşti

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

www.mateinfo.ro

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{x+1}{3}=k, k\in Z \Leftrightarrow x=3k-1$ Obţinem k=0,5$\notin Z$ .Deci,ecuaţia nu are soluţii.	3p 2p
2.	$f_{\max}=\frac{-\Delta}{4a}$ $f_{\max}=9$	2p 3p
3.	S=$\sum_{k=0}^{1006} f(2k+1)=\sum_{k=0}^{1006}(4k+1)$. S=$4\sum_{k=0}^{1006} k+1007$ S=$1007\cdot 2013$	2p 2p 1p
4.	$\frac{1}{3+2i}=\frac{3-2i}{13}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$ Re$\frac{1}{3+2i}=\frac{3}{13}$.	3p 2p
5.	cos2x=1-2$\sin^2 x \Rightarrow 2\sin^2 x+\sin x-5=0$. Obţinem sinx=1 şi sinx=$-\frac{5}{2}\notin[-1;1] \Leftrightarrow$ x=$\frac{\pi}{2}\in[0;\pi]$. Deci ecuaţia are o soluţie.	2p 2p 1p
6.	$\vec{v_1}$ şi $\vec{v_2}$ coliniari $\Leftrightarrow \frac{2+a}{2}=\frac{a}{a-1}$ a$\in\{-1;2\}$.	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Matricea A are 3 linii si 3 coloane,iar 0;1;2;3;4$\in N \Rightarrow A\in M_3(N)$. $I_3\in M_3(N)$	3p 2p

www.mateinfo.ro

b)	$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rangX=1}$ $Y=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rangY=2}$	3p 2p
c)	$X=\begin{pmatrix}a&b&c\\m&n&p\\x&y&z\end{pmatrix};X^{-1}=\begin{pmatrix}a'&b'&c'\\m'&n'&p'\\x'&y'&z'\end{pmatrix}$.Din $X\cdot X^{-1}=I_3\Rightarrow\begin{cases}a\cdot a'+b\cdot m'+c\cdot x'=1\\a\cdot b'+b\cdot n'+c\cdot y'=0\\a\cdot c'+b\cdot p'+c\cdot z'=0\\.....\end{cases}$ I)aa'=1;bm'=0;cx'=0 II) aa'=0;bm'=1;cx'=0 III) aa'=0;bm'=0;cx'=1 etc. Rezultă suma elementelor de pe fiecare linie şi fiecare coloana egală cu 1.	2p 2p 1p
2. a)	$f(x_k)=(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n})^n-1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi-1=0\ ;k=\overline{0;n-1}.$	2p 3p
b)	$f(x)=(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_{k-1})$ $f(x)=(x-1)\ (x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)$. $x_0=1\Rightarrow \prod_{k=1}^{n}(x-x_k)=x^{n-1}+x^{n-2}+...+1$	2p 2p 1p
c)	$\prod_{k=1}^{n-1}(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n})=\left(\cos\frac{(1+2+...+n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(1+2+...+n-1)\pi}{n}\right)=$ $\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{2}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{2}\right)=\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right)^{n-1}=i^{n-1}$. În egalitatea de la b) pentru x=1 obţinem $n=\prod_{k=1}^{n-1}(1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n})$ Rezultă $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}...\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$.	1p 2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

www.mateinfo.ro

1. a)	f'(x)=$\frac{1}{x}$; x>0	2p
	f''(x)=$-\frac{1}{x^2}$ <0 pe $(0;\infty)$	2p
	Rezultă f' este strict descrecătoare pe $(0;\infty)$.	1p
b)	Aplicăm teorema lui Lagrange pentru funcţia f pe intervalul [k;k+1] şi rezultă	1p
	c$\in (k;k+1)$ astfel incât f(k+1)-f(k)= $f'(c)$.	2p
	f'(c)=$\frac{1}{c}$	1p
	f(k+1)-f(k)=$\frac{1}{c}$.	1p
c)	$b_{n+1}-b_n<0$,rezultă şirul $(b_n)_{n\in N^*}$ este descrescător.Din teorema lui Lagrange rezultă	1p
	inegalitatea: $\frac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k}$.însumând inegalităţile pentru k=$\overline{1;n}$, obţinem	1p
	$b_n\geq 0$,deci şirul $(b_n)_{n\in N^*}$ este mărginit.Rezultă $(b_n)_{n\in N^*}$ este convergent.	1p
	Din $a_n>\ln n$ si trecerea la limită in inegalitate,rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$.	2p
2. a)	f(x)>0$\Rightarrow$ Aria=$\int_a^b f(x)dx$	2p
	Aria=$\frac{(b-a)(b^2+4ba+a^2)}{3(b+a)}$	3p
b)	$f^{-1}(x)=\sqrt{(a+b)x-ab}$; $x\in[a;b]$.	2p
	$\int_a^b f^{-1}(x)dx$ .s.v.(a+b)x-ab=t.Obţinem $\frac{1}{a+b}\int_{a^2}^{b^2}\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}\cdot\frac{b^3-a^3}{b+a}$ (1)	2p
	a;b$\in Q\Rightarrow\int_a^b f^{-1}(x)dx\in Q$	1p
c)	$\int_a^b f^{-1}(x)dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{b^3-a^3}{b+a}$.	2p

www.mateinfo.ro

	$\frac{2}{3}\cdot\frac{b^3-a^3}{b+a}>\frac{b^2-a^2}{2}\Leftrightarrow(b-a)^2>0$	3p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Isofache Cătălina Anca

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=-2^{1007}i$	3p
	$\text{Im}\, z=-2^{1007}$	2p
2.	S=x+y; P=xy	1p
	$S^3-3SP=9$; S=3	2p
	S=3;P=2 rezultă (x;y) $\in$ {(1;2);(2;1)}.	2p
3.	x$\in (0;\infty)-\{1\}$	1p
	$\log_2 x=a$; $2a^2-5a+2=0$	2p
	x$\in \left\{4;\sqrt{2}\right\}$	2p
4.	$2C_6^4$	2p
	30 de funcţii	3p
5.	$\cos 2x=1-2\sin^2 x$	2p
	$x\in\{k\pi / k\in Z\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in Z\right\}$.	3p
6.	$\lvert\Delta\rvert=4$	2p
	$A=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$	1p
	A=2	2p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Matricea sistemului	2p
	Calculul determinantului	2p
	Finalizare	1p
b)	$\Delta \neq 0$	3p
	x=1;y=0;z=0	2p
c)	$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0 \Leftrightarrow a=b=c$	1p
	$x^2+y^2+xy=0 \Leftrightarrow$ x=y=0	2p
	Obţinem x+y+z=1.Deci x=0;y=0;z=1	2p
2. a)	A+B$\in G$	1p
	Calculul matricei AB	3p
	AB$\in G$	1p
b)	Det(AB)=det(A)det(B)$\Rightarrow$det(A)=0 sau det(B)=0	3p
	Det(A)=$x^2+5y^2 \Rightarrow$x=y=0$\Rightarrow A=O_2$.Analog pentru matricea B.	2p
c)	$Det(AA^{-1})=1 \Rightarrow \det A=\pm 1$	2p
	$x^2+5y^2=\pm 1$	2p
	$A=\pm I_2$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Factor comun forţat	2p
	Simplificare prin x^4.	2p
	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=1$	1p

www.mateinfo.ro

b)	Calculul rădăcinilor $x_i; i=\overline{1;4}$ ale funcţiei f. Teorema lui Rolle pentru $f:[x_i;x_{i+1}]\to R, i=\overline{1;3}$ Finalizare	2p 2p 1p
c)	$\ln\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\to\infty}\frac{\ln(x+1)+\ln(x+2)+\ln(x+3)+\ln(x+4)}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{\frac{1}{x}}=1$	3p 2p
2. a)	$I_1=0$ I_2: Notăm x=3cost $I_2=\frac{81\pi}{8}$	2p 2p 1p
b)	$f(x)=x^n\sqrt{9-x^2}$; $f(-x)=-f(x), \forall x\in[-3;3]$ Notăm x=-t $I_{2n+1}=0$	2p 1p 2p
c)	$J_{2n+2}=-9\int_{-1}^{1}x^{2n+1}(\sqrt{9-x^2})'dx+\int_{-1}^{1}x^{2n+3}\left(\sqrt{9-x^2}\right)'dx$ Aplicarea formulei de integrare prin părţi $J_{2n+2}=\frac{18n+9}{2n+4}J_{2n}-\frac{32\sqrt{2}}{2n+4}$	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Isofache Cătălina Anca

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\|z\|=2$ $\|z^3\|+\|\overline{z}^3\|=16$	3p 2p
2.	Rezolvăm ecuaţia f(x)=g(x) $x_1=1; x_2=\frac{-1}{2}$. $A(1;0); B(-\frac{1}{2};3)$.	1p 2p 2p
3.	$9^x-3\cdot 6^x+2\cdot 4^x=0 \mid :4^x$ $\left(\frac{3}{2}\right)^x=t; t>0 \Rightarrow t_1=1; t_2=2$ $x_1=0; x_2=\log_{\frac{3}{2}} 2$	1p 2p 2p
4.	$T_{k+1}=C_{100}^k 2^k x^{100-\frac{4k}{3}}; k=\overline{1;100}$ k=75 $\Rightarrow T_{76}$.	3p 2p
5.	$\frac{m+1}{4}=\frac{-2}{-(m-1)}\neq\frac{-5}{7}$	2p

www.mateinfo.ro

	m=±3	3p
6.	$\overrightarrow{GA}=\vec{r}_A-\vec{r}_G;\overrightarrow{GB}=\vec{r}_B-\vec{r}_G;\overrightarrow{GC}=\vec{r}_c-\vec{r}_G$ $\vec{r}_G=\frac{\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C}{3}1$ Finalizare.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\text{Det(A)=ab}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&b\\1&a^2&b^2\end{vmatrix}\overset{L_2-L_1}{\underset{L_3-L_1}{=}}ab\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&b-1\\0&(a-1)(a+1)&(b-1)(b+1)\end{vmatrix}=\text{ab(a-1)(b-1)(b-a).}$ $\text{Det(B)}\overset{C_3-C_1}{\underset{C_2-C_1}{=}}\begin{vmatrix}1&0&0\\bc&c(a-b)&b(a-c)\\a^2&(b-a)(a+b)&(c-a)(c+a)\end{vmatrix}=(a-b)(c-a)\begin{vmatrix}c&b\\a+b&c+a\end{vmatrix}^{L_2+L_1}=$ $(a-b)(c-a)\begin{vmatrix}c&b\\a+b+c&a+b+c\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c).$	3p 2p
b)	$Det(A\cdot {}^TA)=\det(A)\det({}^TA)$ $\text{Det}({}^TA)=\det(A)\in R$ Finalizare.	2p 2p 1p
c)	Calculul matricei $A-{}^TA$ $A-{}^TA$ este matrice antisimetrică $\det(A-{}^TA)=0$	2p 2p 1p
2. a)	Efectuarea produsului (x+1)f(x) Finalizare	2p 3p
b)	De la punctul a) rezultă $x_k^5+1=0;k=\overline{1;4}$	3p 2p

www.mateinfo.ro

	$\sum_{k=1}^{4} x_k^5 = -4$	
c)	$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0 \mid : x^2$ şi notăm $x + \frac{1}{x} = t$. Ecuaţia $t^2 - t - 1 = 0$ are soluţiile $t_{1;2} \in R, \lvert t_{1;2} \rvert < 2$. Ecuaţia $x + \frac{1}{x} = t_{1;2}$ are $\Delta < 0$,rezultă polinomul nu are nicio rădăcină reală.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, rezultă că y=0 este asimptotă orizontală către $+\infty$. $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \infty$, rezultă că x=0 este asimptotă verticală.	3p 2p
b)	$f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)}$;x>0 $f'(x) < 0, \ \forall x > 0$ Funcţia f este strict descrescătoare pe $(0;\infty)$	2p 2p 1p
c)	$a_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $0 \in R \Rightarrow$ şirul (a_n) este convergent.	2p 2p 1p
2. a)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos x)'}{\cos x + 2} dx =$ $= -\ln\lvert\cos x + 2\rvert \Big\rvert_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln\frac{3}{2}$.	3p 2p
b)	Funcţia f este continuă pe R, rezultă că admite primitive pe R. Fie F: $R \to R$ o primitivă a funcţiei f,deci F este derivabilă pe R şi $F'(x) = f(x), \forall x \in R$.	1p 2p

www.mateinfo.ro

	f(x)>0, $\forall x \in R \Rightarrow F'(x) > 0, \forall x \in R$. Deci, orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe R.	1p 1p
c)	Notăm $tg\frac{x}{2} = t$ $\int_0^1 \frac{2}{t^2+3} dt = \frac{\pi}{3}$.	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Isofache Cătălina Anca

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+i)^3 = -2+2i$ $(1-i)^3 = -2-2i$ $(1+i)^3 + (1-i)^3 = -4$	2p 2p 1p
2.	$f_{min} = \frac{-\Delta}{4a}$ $f_{min} = \frac{59}{12}$	2p 3p
3.	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$; cosx=t şi $t \in [-1;1]$.	1p 2p

www.mateinfo.ro

	$t^2+t-2=0 \Leftrightarrow t_1=1; t_2=-2$ $x=2k\pi; k\in Z$.	2p
4.	Numărul de. cazuri posibile=900 Cazurile favorabile:102;108;...996. Numărul de cazuri favorabile=150 $P=\frac{1}{6}$	2p 1p 1p 1p
5.	M mijlocul segmentului [AB], $M\left(\frac{m+3}{2};3\right)$ $CM=\sqrt{(x_M-x_C)^2+(y_M-y_C)^2}$ m$\in\{3;7\}$ Verificarea existeţei triunghiului ABC.	2p 1p 1p 1p
6.	$\frac{1}{a+1}=\frac{a-3}{5}$ $a\in\{-2;4\}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$DetM=-m^2+2m-3$ $\det M\neq 0; \forall m\in R$. RangM=3	2p 2p 1p
b)	$\det M\neq 0; \forall m\in R$ Punctele A,B şi C necoliniare,pentru orice m$\in R$.	3p 2p
c)	$A_{ABC}=\frac{1}{2}\lvert\det M\rvert$	1p 2p

www.mateinfo.ro

	$A_{ABC}=\frac{1}{2}(m^2-2m+3)$ $A_{\min}=1$	2p
2. a)	$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\forall x,y,z\in G$. $(x\circ y)\circ z=\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)-1}$ $x\circ(y\circ z)=\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)-1}$ Finalizare	1p 2p 1p 1p
b)	Elementul neutru e=0 x simetrizabil $\Leftrightarrow \exists\, x'\in G$ astfel încât $x\circ x'=x'\circ x=0$ x=0	2p 2p 1p
c)	$\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{2014\ ori}=\sqrt{(x^2+1)^{2014}-1}$. x=0	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-42}{x-3}=f'(3)$ $f'(x)=3x^2+2x+1$ Valoarea limitei=34	2p 2p 1p
b)	$h(x)=e^x-x-1,\ x\in R$. $h'(x)=e^x-1,\ x\in R$. Din monotonia funcţiei h, rezultă $h_{\min}=0$ Finalizare	1p 1p 2p 1p

www.mateinfo.ro

c)	De la punctul b) rezultă că $g(x^3) \geq x^3+1$; $g(x^2) \geq x^2+1$ şi $g(x) \geq x+1$. Adunând inegalităţile obţinem $g(x^3)+g(x^2)+g(x) \geq f(x), \forall x \in R$	3p 2p
2. a)	Utilizarea metodei coeficienţilor nedeterminaţi A=B=C=1	2p 3p
b)	Aria= $\int_3^4 \lvert f(x) \rvert dx$ f continuă şi f(x)>0, $\forall x \in [3;4]$ Aria= $\ln \frac{15}{4}$.	1p 1p 3p
c)	Calculul lui F(x)=lnx V= $\pi \int_e^{e^2} F^2(x)dx$ V= $2\pi\, e(2e-1)$.	2p 1p 2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof. Lămătic Lidia Carmen

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left\|2\sqrt{2}-3\right\|=3-2\sqrt{2}$	1p
	$\left(\sqrt{2}+1\right)^2=2+2\sqrt{2}+1=3+2\sqrt{2}$	2p
	$n=6\in\mathbb{N}$	2p
2.	$\sqrt[3]{8}=2$	1p
	$2x+1=\frac{2+8}{2}$	2p
	$x=2$	2p
3.	$x^2+3=3x+1\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$	2p
	$x_1=1, x_2=2$ verifică ecuaţia	3p
4.	c par $\Rightarrow c\in\{0,4\}\Rightarrow$ două variante de alegere a lui c	2p
	Pentru fiecare c par sunt trei variante de alegere a lui a şi patru variante de alegere a lui b	2p
	Se pot forma $2\cdot3\cdot4=24$ numere	1p
5.	$1\cdot(-4)+2(a+1)=0$	3p
	$a=1$	2p
6.	$BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow BC=2$	2p
	$\triangle ABC$ dreptunghic în $A\Rightarrow R=\frac{BC}{2}$	2p

www.mateinfo.ro

	$R=1$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}1&2&2a+1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix}1&3&3a+3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$	3p
	$f(A)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	2p
b)	Demonstraţie prin inducţie matematică: $n=2\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}1&2&2a+1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$	1p
	Presupunem că A^k este adevărată pentru numărul natural $k\geq 2$	
	Avem $A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}1&k&ka+C_k^2\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&k+1&(k+1)a+C_{k+1}^2\\0&1&k+1\\0&0&1\end{pmatrix}$ adevărat	4p
	pentru numărul natural $k\geq 2$	
c)	$\det A=1\neq 0,$ deci matricea este inversabilă $\forall a\in\mathbb{R}$	1p
	$A^*=\begin{pmatrix}1&-1&-a+1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$	2p
	$A^{-1}=A^*=\begin{pmatrix}1&-1&-a+1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$	2p
2. a)	$f(1)=a+b-1=0, f(-2)=4a+b-4=0$	2p
	$a+b=1, 4a+b=4$	1p
	$a=1, b=0$	2p
b)	$a=1, b=0\Rightarrow f=X^4+4X^3+X^2-6X$	1p

www.mateinfo.ro

	$f=X\left(X^3+4X^2+X-6\right)\Rightarrow x_1=0$	1p
	Conform punctului a) $\Rightarrow x_2=1, x_3=-2$	1p
	$x_1+x_2+x_3+x_4=-4\Rightarrow x_4=-3$	1p
	$f=X(X-1)(X+2)(X+3)$	1p
c)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)^2-2\left(x_1x_2+x_1x_3+...+x_3x_4\right)=16-2a$	2p
	$x_1x_2x_3x_4=b$	1p
	$16-2a-2b=6\Leftrightarrow a+b=5$	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\dfrac{1}{\dfrac{x^2}{x^2-1}}\cdot\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)'$	2p
	$=\dfrac{-2x}{x^2-1}$, pentru orice $x\in(1;+\infty)$	3p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x^2}{x^2-1}=0$	3p
	Dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei f.	2p
c)	$y-f(2)=f'(2)(x-2)$	2p
	$f(2)=\ln\dfrac{4}{3}, f'(2)=-\dfrac{4}{3}$	2p
	Ecuaţia tangentei la grafic este $y-\ln\dfrac{4}{3}=-\dfrac{4}{3}(x-2)$	1p
2. a)	Fie $G:(3;+\infty)\to\mathbb{R}$ o primitivă oarecare a funcţiei f, $G'(x)=f(x), \forall x\in(3;+\infty)$	2p
	$f(x)>0, \forall x\in(3;+\infty)$	1p

www.mateinfo.ro

	G este strict crescătoare pe $(3;+\infty)$	2p
b)	$F'(x)=\left[x^3+3x+\ln(x-3)\right]'=3x^2+3+\frac{1}{x-3},\forall x\in(3;+\infty)$ $F'(x)=f(x),\forall x\in(3;+\infty)\Rightarrow$ F este o primitivă a funcţiei f	3p 2p
c)	$\int_4^5 f'(x)dx=f(x)\Big\|_4^5$ $f(5)-f(4)=\frac{53}{2}$	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof. Lămătic Lidia Carmen

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$-10\le x+2\le 10$ $-12\le x\le 8$ $(-12)\cdot(-11)\cdot....\cdot 0\cdot 1\cdot....\cdot 8=0$	2p 1p 2p
2.	$\Delta=(-2m)^2-4(m-1)(m+1)=-4$ $-\frac{\Delta}{4a}<0\Leftrightarrow\frac{4}{4(m-1)}<0$ $m-1<0\Rightarrow m\in(-\infty;1)$	1p 2p 2p

www.mateinfo.ro

3.	Notăm $5^x = y$ şi obţinem $y + 25y = \frac{26}{5}$	3p
	$y = \frac{1}{5} \Rightarrow x = -1$	2p
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre $\Rightarrow 90$ de cazuri posibile	1p
	Numerele de două cifre cuburi perfecte sunt 27, 64 $\Rightarrow 2$ de cazuri favorabile	2p
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{45}$	2p
5.	$m_d = -2$	1p
	$m_d \cdot m_{d'} = -1 \Rightarrow m_{d'} = \frac{1}{2}$	2p
	Ecuaţia perpendicularei este $y - y_A = \frac{1}{2}(x - x_A) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$	2p
6.	$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}$	2p
	$\cos B = \frac{5}{9}$	3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A \in P \Rightarrow A^2 = I_3$	1p
	$B^2 = \frac{1}{4}(A^2 + A + A + I_3) = \frac{1}{4}(I_3 + A + A + I_3)$	2p
	$= \frac{1}{2}(A + I_3) = B \in Q$	2p
b)	$A \in Q \Rightarrow A^2 = A$	1p
	$C^2 = 4A^2 - 2A - 2A + I_3 = 4A - 2A - 2A + I_3$	2p
	$= I_3 = C \in P$	2p
c)	$\det A = 1 \neq 0$, deci matricea este inversabilă $\forall a, b \in \mathbb{R}$	1p

www.mateinfo.ro

	$A^*=\begin{pmatrix}1 & -a & a^2-b\\ 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	2p
	$A^{-1}=A^*=\begin{pmatrix}1 & -a & a^2-b\\ 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	2p
2.	$xy+yx=yx+xy$, adevărat $\forall x,y\in I\Rightarrow$ "$*$" comutativă	1p
a)	$(x*y)*z=xyz+yxz+zxy+zyx,\quad x*(y*z)=xyz+xzy+yzx+zyx$	2p
	"$*$" nu este asociativă, deoarece $(I,+,\cdot)$ este inel necomutativ	2p
b)	Datorită comutativităţii este suficientă verificarea distributivităţii la stânga sau la dreapta.	1p
	$x*(y+z)=x(y+z)+(y+z)x=xy+yx+xz+zx=(x*y)+(x*z),\forall x,y,z\in I$	4p
c)	$x^2*(y*x)=x^2*(yx+xy)=x^2yx+x^3y+yx^3+xyx^2$	2p
	$(x^2*y)*x=(x^2y+yx^2)*x=x^2yx+yx^3+x^3y+xyx^2$	2p
	concluzie	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	Nu avem asimptote verticale	1p
a)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0\Rightarrow y=0$ asimptotă orizontală la $+\infty$	2p
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot e^{-x}=-\infty\Rightarrow$ nu există asimptotă orizontală la $-\infty$	1p
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=\infty\Rightarrow$ nu există asimptotă oblică la $-\infty$	1p
b)	$f'(x)=\frac{1-x}{e^x},\forall x\in\mathbb{R}$	1p

www.mateinfo.ro

	$f'(x)=0\Rightarrow x=1$	1p
	f strict crescătoare pe $(-\infty,1)$, f strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$	2p
	$f(1)=\frac{1}{e}\Rightarrow A\left(1;\frac{1}{e}\right)$ punct de maxim	1p
c)	$f''(x)=\frac{x-2}{e^x},\forall x\in\mathbb{R}$	2p
	$f''(x)=0\Rightarrow x=2$	1p
	$f''(x)<0,\forall x<2; f''(x)>0,\forall x>2\Rightarrow x=2$ punct de inflexiune	2p
2. a)	$f(1)=3, f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}, x\neq 1$	2p
	$f(x)>0, x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	3p
b)	$F(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$	1p
	F strict crescătoare $\Rightarrow$ F injectivă	1p
	$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to\infty}F(x)=+\infty\Rightarrow$ F surjectivă	2p
	Deci, F este bijectivă $\Rightarrow$ F inversabilă	1p
c)	$F(0)=0, F(1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$	2p
	$\int_0^{\frac{11}{6}}F^{-1}(x)dx=\int_{F(0)}^{F(1)}F^{-1}(x)dx=\int_0^1 F^{-1}(F(x))F'(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\Big\vert_0^1=\frac{13}{12}.$	3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof. Lămătic Lidia Carmen

www.mateinfo.ro

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_2+a_3=a_1q(1+q)=4,\ a_4+a_5=a_1q^3(1+q)=36$ $q^2=9\Rightarrow q=1$	2p 3p
2.	$G_f\cap Ox: f(x)=0\Rightarrow x=1$ $A(1,0)$ $G_f\cap Oy: f(0)=4$ $B(0,4)$	2p 1p 1p 1p
3.	$x^2-1=x^3-3x^2+3x-1$ $x\left(x^2-4x+3\right)=0$ $x_1=0, x_2=1, x_3=3.$	1p 1p 2p
4.	Numerele de trei cifre distincte care au suma cifrelor egală cu 5 sunt: 104, 140, 203, 230, 302, 320, 401, 410 $\Rightarrow$ 8 cazuri favorabile Numărul de numere naturale de trei cifre distincte este $A_{10}^3-A_9^2=648\Rightarrow$ 648 cazuri posibile $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{1}{81}$	2p 2p 1p
5.	$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{-3+a}{\sqrt{2\left(9+a^2\right)}}$ $m\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)<90^\circ\Leftrightarrow\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)>0\Rightarrow -3+a>0\Rightarrow a>3$	2p 3p
6.	$\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\cos 2\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}$	2p

www.mateinfo.ro

	$\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=1$	3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det(A)=(m-1)^2(m+2)$ Sistem compatibil determinat $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$ $m\in\mathbb{R}-\{-2.1\}$	2p 2p 1p
b)	$\Delta x=3(m-3)(m-1),\Delta y=5(m-1)^2,\Delta z=(7m-1)(m-1)$ $x=\frac{3(m-3)}{(m-1)(m+2)},y=\frac{5}{(m+2)},z=\frac{7m-1}{(m-1)(m+2)}$	3p 2p
c)	(x_0,y_0,z_0) progresie aritmetică cu raţia $2\Leftrightarrow(y_0-2,y_0,y_0+2)$ soluţia sistemului $\begin{cases}m(y_0-2)+y_0+(y_0+2)=3\\(y_0-2)+my_0+(y_0+2)=5\\(y_0-2)+y_0+m(y_0+2)=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+2)y_0+2(1-m)=3\\(m+2)y_0=5\\(m+2)y_0-2(1-m)=7\end{cases}$ $2(1-m)=-2\Rightarrow m=2$	1p 2p 2p
2. a)	$x,y\in I_a\Leftrightarrow x-a>0,y-a>0\Rightarrow(x-a)(y-a)>0$ $x\circ y\in I_a\Leftrightarrow x\circ y-a>0$ $x\circ y=x(y-2)-2(y-2)+2\Rightarrow x\circ y-2>0$ $a=2$	1p 1p 2p 1p
b)	$x\circ e=x\Rightarrow(x-2)(e-3)=0\Rightarrow e=3$ $x\circ x'=3\Rightarrow(x-2)(x'-2)+2=3\Rightarrow x'=2+\frac{1}{x-2}$ $x=2014\Rightarrow x'=\frac{4025}{2012}$	2p 2p 1p
c)	f este bijectivă deoarece este de funcţie gradul I	2p

www.mateinfo.ro

	$f(xy)=xy+2$ $f(x)\circ f(y)=(f(x)-2)(f(y)-2)+2=xy+2$ $f(xy)=f(x)\circ f(y)$	3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Nu există asimptote orizontale sau oblice $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\infty \Rightarrow x=a$ asimptotă verticala la stânga $\lim\limits_{\substack{x\to -a\\ x>-a}} f(x)=-\infty \Rightarrow x=-a$ asimptotă verticala la dreapta	1p 2p 2p
b)	$f'(x)=\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}=\frac{2a}{a^2-x^2}$ $f'(x)>0, x\in(-a,a)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(-a,a)\Rightarrow f$ injectivă Deoarece $f(0)=0\Rightarrow x=0$ soluţie unică.	2p 2p 1p
c)	$f''(x)=\frac{-1}{(a+x)^2}+\frac{1}{(a-x)^2}=\frac{4ax}{(a^2-x^2)^2}$ $f''(x)=0\Rightarrow x=0$ $f''(x)>0,\forall x\in(0,a)\Rightarrow f$ convexă pe $(0,a)$, $f''(x)<0,\forall x\in(-a,0)\Rightarrow f$ concavă pe $(-a,0)$	2p 1p 2p
2. a)	f continuă, admite primitive Fie F o primitivă $F'(x)=f(x)\Rightarrow F''(x)=f'(x)$ $f'(x)=2e^{2x}>0,\forall x\in\mathbb{R}$, deci F este convexă pe $\mathbb{R}$	1p 2p 2p
b)	$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 xe^{2x}dx=\frac{xe^{2x}}{2}\Big\vert_0^1-\frac{e^{2x}}{4}\Big\vert_0^1=$ $=\frac{e^2+1}{4}$	3p 2p

www.mateinfo.ro

c)	$g(x)=x-2$	1p
	$V=\pi\int_{-1}^{1} g^2(x)dx=\pi\int_{-1}^{1}\left(x^2-4x+4\right)dx$	2p
	$V=\pi\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\Big\|_{-1}^{1}=\frac{26}{3}\pi$	2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Gaga Loghin

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\varepsilon^3 = 1$	3p 2p
2.	$y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$ $\begin{cases} 3x^2 - 4x - 14 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}; \Rightarrow 12m^2 + 8m + 1 = 0$ Rezolvare. Cel mai mare este $m = -\frac{1}{6}$	1p 2p 2p
3.	Condiţii de existenţă: $\begin{cases} 3x^2 - 4x - 15 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$ Rezolvare sistem de inecuaţii şi soluţie: $x \in [3, +\infty)$ Rezolvare: $2x^2 = 19; x_1 = \sqrt{\frac{19}{2}}; x_2 = -\sqrt{\frac{19}{2}}$ *nu convine*;	1p 2p 2p
4.	$p = \frac{cf}{cp}$ $cf = 5;\ cp = 100\ \ p = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$	2p 3p
5.	$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ $\overline{AC} = \overline{i} - \overline{j} \Rightarrow \left(\overline{AB} + \overline{BC}\right)(1, -1)$	3p 2p

www.mateinfo.ro

6.	$\cos 90^0 = 0$ $\Rightarrow \cos 1^0 \cdot \cos 2^0 \cdot \ldots \cdot \cos 179^0 = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A = 0$. Alegem un determinand de ordinul 2; $d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0$ Deoarece $d_1 \neq 0 \Rightarrow$ rangA = 2	3p 2p
b)	Calcul $V(x) = \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 3 & 2 & 1+x \end{pmatrix}$ Determinare $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 1$ Rezolvare ecuația $x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 1$; $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -5$	1p 2p 2p
c)	Presupun că există o matrice B, astfel încât $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Atunci sistemul $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{cases}$ are soluție. Deoarece rangA =2, $\Delta_p = d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ este minor principal. Minorul caracteristic este $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Deoarece determinantul caracteristic este nenul, conform Teoremei Rouche, sistemul este incompatibil. Deci afirmația este falsă.	1p 2p 2p
2. a)	$x * x = 2x - 3$ $x \circ x = x^2 - 6x + 12$ Din $x * x = x \circ x \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$ Rezolvare ecuație și soluții $x_1 = 5, x_2 = 3$	1p 1p 2p 1p

www.mateinfo.ro

b)	$x\circ a=3\Rightarrow (x-3)(a-3)+3=3\Leftrightarrow (x-3)(a-3)=0$ Pentru $x\neq 3\Rightarrow a=3$ Pentru $x=3\Rightarrow 3\circ 3=0\cdot 0=0$	3p 2p
c)	Sistemul devine $\begin{cases}x+y=3\\x-y=2\end{cases}$ Finalizare, $x=\frac{5}{2}, y=\frac{1}{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ $f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$	2p 3p
b)	Știm că , pentru un $x_0\in D$, unde D este domeniul de definiție al funcției, funcția are derivată în x_0 , atunci există relația $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$, finită În cazul nostru, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{3}{4}$	3p 2p
c)	Domeniul de concavitate se găsește în intervalul în care $f''(x)\le 0$, iar domeniul de convexitate, în ntervalul în care $f''(x)\ge 0$ $f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$ Din semnul funcției $f''(x)$, vedem că funcția f este strict convexă pentru $x\in(-1,+\infty)$	1p 2p 2p
2. a)	$I_1=\int_e^{e^2} x\ln x\cdot dx$	1p 3p

www.mateinfo.ro

	Folosim formula de integrare prin părți și obținem: $I_1=\dfrac{3e^4-e^2}{4}$	
b)	$I_{n+1}=\int_e^{e^2} x\ln^{n+1}x\,dx$ Funcția $f:\left[e,e^2\right]\to\mathbb{R}, f\left(x\right)=\ln x$ este crescătoare pe domeniul de definiție, deci $\ln^n x\le\ln^{n+1}x\Rightarrow x\ln^n x\le x\ln^{n+1}x,\forall x\in\left[e,e^2\right]$ $\Rightarrow\int_e^{e^2} x\ln^n x\,dx\le\int_e^{e^2} x\ln^{n+1}x\,dx\Rightarrow I_n\le I_{n+1},\forall x\in\left[e,e^2\right],n\in\mathbb{N}$	1p 1p 2p 1p
c)	După calcule, se obține $I_n=\dfrac{e^4\cdot 2^n-e^2}{2}-\dfrac{n}{2}I_{n-1}$	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Gaga Loghin

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(1-i\sqrt{3}\right)^3=\left(1-i\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(1-i\sqrt{3}\right)=\left(-2-2i\sqrt{3}\right)\cdot\left(1-i\sqrt{3}\right)=$ $-2\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)=-2\left(1+3\right)=-8$ $\Rightarrow\left(1-i\sqrt{3}\right)^3=-8\in\mathbb{Z}$	3p 2p

www.mateinfo.ro

2.	Ecuația admite soluții reale, dacă are $\Delta \geq 0$	1p
	$\Delta = (3a+1)^2 - 4a(a+3) = 9a^2 + 6a + 1 - 4a^2 - 12a = 5a^2 - 6a + 1 = (a-1)(5a-1)$	2p
	$\Delta \geq 0 \Rightarrow (a-1)(5a-1) \geq 0 \Rightarrow a \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right] \cup [1, +\infty)$	2p
3.	Condiții de existență: $\begin{cases} x-16>0 \\ \log_3(x-16)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>16 \\ x-16>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>16 \\ x>17 \end{cases} \Rightarrow x \in (17, \infty)$	2p
	Ecuația devine : $\log_3(x-16) = 2 \Leftrightarrow x-16 = 3^2 \Rightarrow x = 25; \text{x} = 5^2 \in \mathbb{Z}$, care este patrat perfect	3p
4.	Notez cu x prețul inițial. Reducerea cu 20%: este $\frac{20}{100}x = \frac{20x}{100}$.	1p
	Prețul după reducere: $x - \frac{20x}{100} = \frac{80x}{100}$. Scumpirea se face din acest preț.	1p
	Scumpirea cu 15% este: $\frac{15}{100} \cdot \frac{80x}{100} = \frac{12x}{100}$	1p
	Prețul după scumpire: $\frac{80x}{100} + \frac{12x}{100} = \frac{92x}{100}$	1p
	$\frac{92x}{100} = 575 \Rightarrow x = 625$ lei	1p
5.	Înălțimea di C este perpendiculaă pe AB	1p
	Știm că, între pantele m și m_1 a două drepte perpendiculare, există relația $m \cdot m_1 = -1$. În cazul nostru: $m_h \cdot m_{AB} = -1$; $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow m_h = -1$.	2p
	Ecuația dreptei care trece prin punctul $C(-1,1)$ și are panta $m_h = 1$, este	2p
	$y-1 = 1 \cdot (x+1) \Leftrightarrow y-1 = x+1 \Leftrightarrow y = x+2$	
6.	Observ că expresia seamnănă cu formula: $2\sin x \cos x = \sin 2x$. Completând, obținem:	1p
	$E(x) = \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sin x$	2p
	Știm că $\sin x \in [-1,1] \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sin x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow E_{\max} = \frac{1}{2}$	2p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$;	2p
	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=a^2-2a+1=(a-1)^2$.	3p
b)	Dacă $a\neq 1\Rightarrow rangA=3$; dacă $a=1\Rightarrow rangA=1$	3p
	Se observă că $rangA\neq 2$	2p
c)	Pentru $a\neq 1\Rightarrow rangA=3$, deci sistemul este compatibil determinat (Cramer)	2p
	$\Delta_x=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=a^3-3a+2=(a-1)^2(a+2)\Rightarrow x=\frac{\Delta_x}{\det A}=a+2$	3p
	$\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=-a^2+2a-1=-(a-1)^2\Rightarrow y=\frac{\Delta_y}{\det A}=-1$	
	$\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-a^2+2a-1=-(a-1)^2\Rightarrow z=\frac{\Delta_z}{\det A}=-1$	
2. a)	$\hat{2}x+\hat{4}=\hat{3}\,\vert+\hat{1}$	2p
	$\Leftrightarrow \hat{2}x=\hat{4}\Rightarrow x=\hat{2}$	3p
b)	$\begin{vmatrix}\hat{1} & \hat{3} & \hat{4}\\ \hat{2} & \hat{2} & \hat{1}\\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{3}\end{vmatrix}=\hat{1}+\hat{4}+\hat{3}-\hat{4}-\hat{3}-\hat{1}=\hat{1}+\hat{4}+\hat{3}+\hat{1}+\hat{2}+\hat{4}$	3p 2p

www.mateinfo.ro

	$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{3} & \hat{4} \\ \hat{2} & \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{3} \end{vmatrix} = \hat{0}$	
c)	$\begin{cases} \hat{3}x+y=\hat{4} \mid \cdot \hat{3} \\ x+\hat{2}y=\hat{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{4}x+\hat{3}y=\hat{2} \\ x+\hat{2}y=\hat{3} \end{cases}$. Adunăm cele 2 ecuații și obținem: $\hat{0}=\hat{0}$. Rezuktă $S=\{(\hat{0},\hat{4});(\hat{1},\hat{1});(\hat{2},\hat{3});(\hat{3},\hat{0});(\hat{4},\hat{2})\}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{(x^2+2x)'\cdot(x-2)-(x^2+2x)\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}$	2p
	$f'(x)=\frac{(2x+2)\cdot(x-2)-(x^2+2x)}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x+2x-4-x^2-2x}{(x-2)^2}$	2p
	$\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-4x-4}{(x-2)}$	1p
b)	Graficul funcției f poate să aibă, la $-\infty$, asimptotă orizontală sau vertical.	1p
	Cercetăm dacă există asimptotă orizontală: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}\right)}=-\infty$,	1p
	deci nu există asimptotă orizontală.	
	Cercetăm existența asimptotei oblice, care are ecuația $y=mx+n$, unde $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$; $n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]$	1p
	$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x}{x^2-2x}=1$; $n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+2x}{x-2}-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x}{x-2}=4\Rightarrow y=x+4$	2p
c)	Punctele de extrem se află printre soluțiile derivatei I.	1p

www.mateinfo.ro

	$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x^2-4x-4}{(x-2)^2}=0\Rightarrow x^2-4x-4=0\ \Rightarrow x_1=2\left(1+\sqrt{2}\right);x_2=2\left(1-\sqrt{2}\right)$	1p
	Pentru ca $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))$ să fie puncte de extreme trebuie ca x_1,x_2 să nu fie soluții și pentru derivata a doua.	1p
	$f''(x)=\frac{16}{(x-2)^3}$, care nu are soluții. Deci	1p
	Punctele de extrem ale funcției f sunt: $V_1\left(\left(2+2\sqrt{2}\right),\left(3+2\sqrt{2}\right)\right);\ V_2\left(\left(2-2\sqrt{2}\right),\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)$	1p
2.	Pentru n=3 avem:	
a)	$\int\frac{x^3}{x^4+1}dx=\frac{1}{4}\int\frac{\left(x^4+1\right)'}{x^4+1}dx=\frac{1}{4}\int\frac{\varphi'}{\varphi}dx=\frac{1}{4}\cdot\ln\lvert\varphi\rvert+C$	3p
	$\Rightarrow\int\frac{x^3}{x^4+1}dx=\frac{1}{4}\cdot\ln\left\lvert x^4+1\right\rvert+C;C\in\mathbb{R}$	2p
b)	$I_1=\int_0^1\frac{x}{x^4+1}dx=\int_0^1\frac{x}{\left(x^2\right)^2+1}dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1\frac{\varphi'}{\varphi^2+1}dx=\frac{1}{2}arctg\varphi\Big\rvert_0^1=\frac{1}{2}arctgx^2\Big\rvert_0^1=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$	2p
	$I_3=\int_0^1\frac{x^3}{x^4+1}dx\overset{cf\ a)}{=}\frac{1}{4}\cdot\ln\lvert\varphi(x)\rvert\Big\rvert_0^1=\frac{1}{4}\cdot\ln\left\lvert x^4+1\right\rvert\Big\rvert_0^1=\frac{\ln 2}{4}$	3p
c)	$\forall x\in[0,1],x^{n+1}\le x^n\Rightarrow\frac{x^{n+1}}{x^4+1}\le\frac{x^n}{x^4+1}\Rightarrow\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^4+1}\le\int_0^1\frac{x^n}{x^4+1}\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$, adică I_n șir descrescător	2p
	Deoarece I_n șir descrescător, rezultă $I_1>I_2>I_3\Leftrightarrow I_3<I_2<I_1\Rightarrow I_2\in\left(\frac{\ln 2}{4},\frac{\pi}{8}\right)$	3p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Gaga Loghin

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$x_1^2+x_2^2=x_1+x_2+2\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=x_1+x_2+2$ $a=1,b=-m,c=-1;\ x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-m}{1}=m;\ x_1x_2=\frac{c}{a}=-1$ Înlocuind, $\Rightarrow m^2-2(-1)=m+2\Leftrightarrow m^2-m=0\Rightarrow m=0;\ m=1$	3 p 2 p
2.	Metoda 1. Observ că şirul este format din suma numerelor naturale impare, $1+3+5+\cdots+(2n-1)$, pentru care avem relaţia: $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$, unde n este numărul de numere. Deci n=2014 Metoda 2. $x_1+x_2+\cdots+x_n=1+3+\cdots+(2n-1)=2014^2$. Ni se sugerează suma unei progresii aritmetice : $x_{n-1}=2n-3, x_n=2n-1, x_{n+1}=2n+1;\frac{x_{n-1}+x_{n+1}}{2}=\frac{2n-3+2n+1}{2}=2n-1=x_n$. Deci elementele şirului formează o progresie aritmetică, cu $x_1=1,x_2=3;r=x_2-x_1=2$ $x_n=x_1+(n-1)r;\ S_n=\frac{x_1+x_n}{2}\cdot n\Rightarrow 2014^2=\frac{1+1+(n-1)\cdot 2}{2}\cdot n;$ $2014^2=\frac{2(1+n-1)}{2}\cdot n\Rightarrow 2014^2=n^2\Rightarrow n=2014$	1 p 2 p 2 p
3.	Metoda 1. $\sqrt{3}=tg60^0=\frac{\sin 60^0}{\cos 60^0};\ \cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y=\cos(x+y)$ $\frac{\sin 60^0}{\cos 60^0}\cdot\sin x-\cos x=1\Leftrightarrow \sin 60^0\cdot\sin x-\cos 60^0\cdot\cos x=\cos 60^0\ \ \big\vert\cdot(-1)$	1 p 2 p 2

www.mateinfo.ro

	$\Rightarrow \cos\left(60^0+x\right)=-\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{\pi}{3}+x=\pi-\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\pi-\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ sau $\frac{\pi}{3}+x=\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\pi$ Metoda 2. Ecuația se mai scrie: $\sqrt{3}\cdot\sin x=1+\cos x$; dar $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$, iar $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ $\Rightarrow 2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{2}\Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\right)=0$ $\Rightarrow \cos\frac{x}{2}=0; x=\pi,\ \cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}=0, tg\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$	p
4.	Notez cu x prețul produsului. $x+\frac{24}{100}x=372$ $\frac{124}{100}x=372\Rightarrow x=372\cdot\frac{100}{124}; x=300$	2 p 3 p
5.	$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow 3a-(a-1)(3a-1)=0$ $\Leftrightarrow 3a-\left(3a^2-4a+1\right)=0\Leftrightarrow 3a^2-7a+1=0\Rightarrow a_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{37}}{6}$	2 p 3 p
6.	$S=\sin^2 1^0+\sin^2 2^0+\cdots+\sin^2 90^0=$ $=\sin^2 1^0+\sin^2 89^0+\sin^2 2^0+\sin^2 88^0+\cdots+\sin^2 44^0+\sin^2 46^0+\sin^2 45^0+\sin^2 90^0$ $=\sin^2 1^0+\sin^2\left(90^0-1^0\right)+\sin^2 2^0+\sin^2\left(90^0-2^0\right)+\cdots+\sin^2 44^0+\sin^2\left(90^0-46^0\right)+\sin^2 45^0+\sin^2 90^0$ $=\left(\sin^2 1^0+\cos^2 1^0\right)+\left(\sin^2 2^0+\cos^2 2^0\right)+\cdots+\left(\sin^2 44^0+\cos^2 44^0\right)+\sin^2 45^0+\sin^2 90^0$ $=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{44\ ori}+\frac{1}{2}+1=45+\frac{1}{2}=\frac{91}{2}$	2 p 1 p 2 p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^3=A^2\cdot A$ $A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	1p 2p

www.mateinfo.ro

	$A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$	2p
b)	$A^t=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$	1p
	$A+A^t+I_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$	1p
	$d=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0$. Se observă că toți determinanții de ordinal 2 sunt nuli și determinantul de ordinal 1 este $d_1=1\neq 0\Rightarrow$ rang $A+A^t+I_3$ este 1	3p
c)	Fie $B=A+I_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$	1p
	$\det(A+I_3)=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow\exists(A+I_3)^{-1}$ și $B^{-1}=\frac{1}{\det B}\cdot B^*$.	1p
	Pentru a determina matricea adjunct, B^*, se construiește transpusa matricei, $B^t=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	1p
	Pe baza ei construim B^*, care este matricea complementților algebrici ai matricei B^t:	1p
	$\delta_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1;\delta_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}=0;\delta_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}=0$	
	$\delta_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1;\delta_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1;\delta_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}=0$	
	$\delta_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0;\delta_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1;\delta_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1$	

www.mateinfo.ro

	$\Rightarrow B^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{1}\cdot B^*=B^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$	1p
2. a)	Fie $g=X^2-1$, cu soluțiile $x=1, x=-1$.	2p
	$g\mid f\Rightarrow\begin{cases}f(1)=0\\f(-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+2=0\\-a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-2\\-a+b=0\end{cases}\Rightarrow b=-1, a=-1$	3p
b)	$x_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Formez ecuația de gradul 2 care are rădăcinile x_1, x_2 și forma: $x^2-Sx+P=0\Rightarrow g=X^2-Sx+P$.	1p
	$S=x_1+x_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1;\ P=x_1\cdot x_2=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1\Rightarrow g=X^2-X+1$	2p
	F și g au două rădăcini comuni, deci $g\mid f$. efectuăm împărțirea și obținem restul $b-a=0\Rightarrow b=a\ \Rightarrow f=X^4-4X^3+X-4$	2p
c)	Petru a=-4, polinomul devine : $f=X^4-4X^3+X-4$	1p
	Calculăm expresia și obținem: $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}=\frac{(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)^2-2x_1x_2x_3x_4(x_1x_2+x_1x_3+\cdots)}{(x_1x_2x_3x_4)^2}$	2p
	Relațiile lui Viete : $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=4\\x_1x_2+x_1x_3+\cdots=0\\x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-1\\x_1x_2x_3x_4=-4\end{cases}$	
	Deci $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}=\frac{16}{16}=1$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Calculăm derivata I. $f'(x)=\frac{(x^2-x+1)'\cdot(x+1)-(x^2-x+1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$	2p

www.mateinfo.ro

	$f'(x)=0\Rightarrow x_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}$ Pentru $x\in(0,\infty)$ semnul derivatei I este: $f'(x)\le 0,\ pt.\ x\in\left(0,-1+\sqrt{3}\right)\Rightarrow f(x)$ descrescătoare $f'(x)>0,\ pt.\ x\in\left(-1+\sqrt{3},\infty\right)\Rightarrow f(x)$ crescătoare.	3p
b)	$f''(x)=\dfrac{(2x+2)(x+1)^2-\left(x^2+2x-2\right)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=$ $=\dfrac{2(x+1)\left(x^2+2x+1-x^2-2x+2\right)}{(x+1)^4}=\dfrac{6}{(x+1)^3}>0$ Deci f(x) este strict convexă pentru $x\in(0,\infty)$	1p 1p 1p 2p
c)	Știm că $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$ (inegalitatea mediei). Deoarece, f(x) strict crescătoare, pe $\left(-1+\sqrt{3},\infty\right)\Rightarrow f\left(\sqrt{ab}\right)\le f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ Deoarece f(x) convexă pentru $x\in\left(-1+\sqrt{3},\infty\right),\Rightarrow\dfrac{f(a)+f(b)}{2}\ge f\left(\dfrac{a+b}{2}\right).$	2p 1p 2p
2. a)	$I_2=\int_0^1\dfrac{x^2}{1+x^3}dx=\dfrac{1}{3}\int_0^1\dfrac{\left(x^3+1\right)'}{1+x^3}dx=\dfrac{1}{3}\int_0^1\dfrac{\varphi'}{\varphi}dx=\dfrac{1}{3}\ln\lvert\varphi\rvert\Big\rvert_1^3=$ $=\dfrac{1}{3}\ln\left\lvert 1+x^3\right\rvert\Big\rvert_1^3=\dfrac{1}{3}(\ln 28-\ln 2)=\dfrac{1}{3}\ln 14$	3p 2p
b)	$x\in[0,1]\Rightarrow x^{n+1}<x^n\Leftrightarrow\dfrac{x^{n+1}}{1+x^3}<\dfrac{x^n}{1+x^3}\Leftrightarrow\int_0^1\dfrac{x^{n+1}}{1+x^3}dx<\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^3}dx$ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^{n+1}}{1+x^3}dx<\lim\limits_{n\to\infty}I_n<\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^{n-1}}{1+x^3}dx$ $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$ $\Rightarrow I_{n+1}<I_n$, **deci șirul este strict descrescător.**	3p 2p
c)	Conform punctului b), $I_{n+1}<I_n<I_{n-1}$.	2p

www.mateinfo.ro

	Trecând la limită, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^3}dx < \lim\limits_{n\to\infty} I_n < \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^3}dx$ $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$	3p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Marcu Ştefan Florin

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Ştim că $b_4 = b_1 \cdot q^3$, deci $q = 3$ Atunci $S_6 = b_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 728$	3p 2p
2.	$f(x) = y$ $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -2$ Punctele căutate sunt : $A(3,14)$ şi $B(-2,4)$	1p 2p 2p
3.	$4 = 2^2$ $2^{x-4} = 2^{2x-4}$ $x = 0$	1p 2p 2p
4.	Cifrele impare sunt : 1,3,5,7,9 Numarul căutat este : $A_5^4 = 120$	2p 3p
5.	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ $AB = \sqrt{2}, AC = 5, BC = \sqrt{13} \Rightarrow P = 5 + \sqrt{2} + \sqrt{13}$	2p 3p
6.	Din teorema cosinusului avem : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$ $36 = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos A$	2p 1p

www.mateinfo.ro

	$\cos A = \frac{1}{8}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A(x)+A(-x)=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & x & 2 \\ 1 & -2 & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -x & 1 & -1 \\ -1 & -x & 2 \\ 1 & -2 & -x \end{pmatrix}=$	2p
	$=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$	2p
	$\det(A(x)+A(-x))=0$	1p
b)	$\det A(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & x & 2 \\ 1 & -2 & x \end{vmatrix}=x^3+6x$	3p
	$\det(A(x))=0 \Leftrightarrow x(x^2+6)=0 \Leftrightarrow x=0$	2p
c)	$A(x)\cdot A(-x)=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & x & 2 \\ 1 & -2 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x & 1 & -1 \\ -1 & -x & 2 \\ 1 & -2 & -x \end{pmatrix}=$	1p
	$=\begin{pmatrix} -x^2-2 & 2 & 2 \\ 2 & -x^2-5 & 1 \\ 2 & 1 & -x^2-5 \end{pmatrix}$	2p
	Suma cerută este $-3x^2-12<0$	2p
2. a)	$(x+5)(y+5)-5=$	1p
	$=xy+5x+5y+25-5=$	3p
	$=x\circ y$	1p
b)	$x\circ e=e\circ x=x, \forall x\in R$	3p
	$(x+5)(e+5)-5=x \Rightarrow e+5=1 \Rightarrow e=-4$	2p

www.mateinfo.ro

c)	$\underbrace{x\circ x\circ ...\circ x}_{2014-ori}=(x+5)^{2014}-5$ $(x+5)^{2014}=x+5\Rightarrow x+5=0, x+5=1$ $x=-5, x=-4$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $f'(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ $f'(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}, (\forall)x\in R$	2p 2p 1p
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+1})=$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}{x-\sqrt{x^2+1}}=$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2+1}}=0$ Dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.	1p 1p 1p 2p
c)	Vom arăta că $f'(x)>0 \ (\forall)x\in R$ Dacă $x\geq 0\Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}>0$ evident. Dacă $x<0\Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}>0\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+1>x^2, (\forall)x\in R$ (adevărat).	1p 1p 1p 2p

www.mateinfo.ro

2. a)	$I_1 = \int_0^1 x \cdot e^x dx = \int_0^1 x \cdot (e^x)' dx =$ $= (x-1) \cdot e^x \Big\|_0^1 =$ $= 1$	2p 2p 1p
b)	$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \cdot e^x dx, n \in N$ Dar $x \in (0,1) \Rightarrow x^{n+1} < x^n \Rightarrow I_{n+1} < I_n$ Deci şirul $(I_n)_{n \in N}$ este strict descrescător .	1p 2p 2p
c)	$I_n = \int_0^1 x^n \cdot (e^x)' dx =$ $= x^n \cdot e^x \Big\|_0^1 - n \cdot \int_0^1 x^{n-1} \cdot e^x dx =$ $= e - n \cdot I_{n-1}$, de unde rezultă relaţia cerută .	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Marcu Ştefan Florin

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\lvert z\rvert = \dfrac{\lvert 1+i\rvert^{2014}}{\lvert 1-i\rvert^{2013}}$	3p
	$\lvert 1+i\rvert = \lvert 1-i\rvert = \sqrt{2} \Rightarrow \lvert z\rvert = \sqrt{2}$	2p
2.	$x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2}$	2p
	$\Delta = -3 \Rightarrow y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{3}{4}$	3p
3.	$x > 0$	1p
	$\log_2(x^2+1) = \log_2(2x)$	2p
	$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$	2p
4.	Numerele de două cifre divizibile cu 5 sunt 10,15,.....95	2p
	Avem 18 cazuri favorabile şi 90 cazuri posibile $\Rightarrow P = \dfrac{18}{90} = \dfrac{1}{5}$	3p
5.	Dacă notăm cu M mijlocul segmentului AB $\Rightarrow M(0,0)$	2p
	Atunci $CM = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$	3p

www.mateinfo.ro

6.	$\sin C = \sin(A+B)$	2p
	$\sin C = \sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}) =$	1p
	$= \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$I_2 + x\cdot A = \begin{pmatrix} 1-x & 2x \\ 2x & 1-4x \end{pmatrix}$	2p
	$\det(I_2 + x\cdot A) = 1-5x$	2p
	$1-5x=0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$	1p
b)	$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$	3p
	$A^2 = -5A \Rightarrow A^2 + 5A = O_2$	2p
c)	Observăm că $A^n = (-5)^{n-1}A, \forall n \in N^*$	1p
	Atunci $A + A^2 + ... + A^{2014} = (1-5+5^2-...-5^{2013})A =$	2p
	$= \frac{1-5^{2014}}{6}\cdot A$	2p
2. a)	Din condiţiile problemei , obţinem $c = 1, 1+a+b+c = 4, -1+a-b+c = 0$	2p
	Atunci $a+b=2, a-b=0$	2p
	$a=b=c=1$	1p
b)	$f = X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)(X^2+1)$	3p
	$x_1 = -1, x_2 = i, x_3 = -i$	2p

www.mateinfo.ro

c)	Din relaţiile lui Viete, avem : $x_1+x_2+x_3=-a, x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b$ Atunci $x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2-2b<0$ Dacă toate rădăcinile ar fi reale, am avea $x_1^2+x_2^2+x_3^2\geq 0$, contradicţie .	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$ Dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$	1p 2p 2p
b)	$f'(x)=\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)'=\dfrac{x'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$ $=\dfrac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2}=$ $=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.	2p 1p 2p
c)	Vom arăta că $f'(x)>0,(\forall)x\in(-1,1)$ Dar $x\in(-1,1)\Leftrightarrow 1-x^2>0$ Deci $\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=f'(x)>0$	2p 2p 1p
2. a)	$I_2=\int_0^1\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}dx=$ $=\int_0^1(x+1)dx=$	2p 2p

www.mateinfo.ro

	$=\frac{3}{2}$	1p
b)	Evident $\frac{x^n+nx+1}{x+1}>0,(\forall)x\in(0,1),n\in N\Rightarrow I_n>0$	1p
	Din $x\in(0,1)\Rightarrow x^n<1$	1p
	Atunci $\frac{x^n+nx+1}{x+1}<\frac{n+2}{x+1}$	1p
	Integrând inegalitatea de mai sus $\Rightarrow I_n<(n+2)\cdot\ln 2$	2p
c)	$I_{n+1}=\int_0^1\frac{x^{n+1}+(n+1)x+1}{x+1}dx$	1p
	$I_n+I_{n+1}=\frac{2n^2+3n+2}{n+1}+(1-2n)\ln 2$	2p
	$\underbrace{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot(I_n+I_{n+1})=2-2\ln 2$	2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Marcu Ştefan Florin

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Se observă că avem o sumă de 7 termeni în progresie geometrică cu raţia $q=-\frac{1}{3}$ Atunci $S=\frac{3}{4}(1+\frac{1}{3^7})$	3p 2p
2.	$f(0)=1, g(0)=3$ $f(g(0))=f(3)=7\,,\, g(f(0))=g(1)=4$ $f(g(0))-g(f(0))=3$	1p 2p 2p
3.	$x\geq 3$ $x^2+1=(x-3)^2$ $6x=8\Rightarrow x=\frac{4}{3}\Rightarrow$ Ecuaţia nu are soluţii reale .	1p 2p 2p
4.	Cifrele pare nenule sunt 2,4,6,8 Numărul cerut este $A_4^3=24$	2p 3p
5.	$x\cdot\vec{u}+y\cdot\vec{v}=(x+y)\cdot\vec{i}+(x-y)\cdot\vec{j}$ Atunci $x+y=5, x-y=-1\Rightarrow x=2, y=3$	2p 3p

www.mateinfo.ro

6.	$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \cos x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$	2p
	$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$	1p
	$\sin 2x=\frac{4\sqrt{2}}{9}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Calculăm aria triunghiului $OA_mA_n, m,n\in N$	2p
	$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 2m-1 & 2m+1 & 1\\ 2n-1 & 2n+1 & 1\end{vmatrix}$	
	$\Delta=4(m-n)\Rightarrow Aria=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert=2\lvert m-n\rvert$	2p
	Atunci, aria triunghiului $OA_{2013}A_{2014}$ este egală cu 2 .	1p
b)	Se verifică condiţia de coliniaritate a trei puncte : $\begin{vmatrix}2m-1 & 2m+1 & 1\\ 2n-1 & 2n+1 & 1\\ 2p-1 & 2p+1 & 1\end{vmatrix}=0$	3p
	Prin calcul, obţinem egalitatea .	2p
c)	Observăm că punctele $A_0, A_1,..., A_{2014}$ sunt coliniare (din b))	1p
	Atunci dreptele distincte sunt : $OA_0, OA_1,..., OA_{2014}, A_0A_{2014}$	2p
	În total avem 2016 drepte .	2p
2. a)	$(x-1)(y-1)+1=xy-x-y+2$	1p
	Dar $xy-x-y+2=x\cdot y-ax-ay+2$	3p
	Deci $a=1$	1p
b)	Aflăm mai întâi elementul neutru al legii : $x\circ e=e\circ x=x,\forall x\in R\Rightarrow e=2$	3p

www.mateinfo.ro

	Verificăm condiţia de simetric : $\frac{2014}{2013}\circ 2014 = 2014 \circ \frac{2014}{2013} = 2$	2p
c)	$x \circ x = x^2 - 2ax + 2 > 0,\ (\forall) x \in R$ $\Delta = 4a^2 - 8 < 0$ $a \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Calculăm $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ $= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0$ Dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.	2p 2p 1p
b)	$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' =$ $= \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} =$ $= \frac{e^x(x-1)}{x^2}$.	1p 2p 2p
c)	Dacă $x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0$ Deci f este strict crescătoare pe intervalul $(1, +\infty)$ Dar $1 < \ln 2013 < \ln 2014 \Rightarrow f(\ln 2013) < f(\ln 2014)$ Deci $\frac{2014}{\ln 2014} > \frac{2013}{\ln 2013}$.	1p 1p 1p 2p
2. a)	$I_1 = \int_0^1 x \cdot (1-x)dx =$	2p

www.mateinfo.ro

	$=(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\Big\|_0^1=$ $=\frac{1}{6}$	2p 1p
b)	Arătăm că şirul $(I_n)_{n\in N}$ este strict descrescător şi mărginit Din $x\in(0,1)\Rightarrow 1-x\in(0,1)\Rightarrow (1-x)^n>(1-x)^{n+1}\Rightarrow I_{n+1}<I_n$ Evident $I_n>0$. Dar $(1-x)^n<1\Rightarrow I_n<\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$	1p 2p 2p
c)	Efectuăm schimbarea de variabilă $u=1-x$ Atunci $I_n=\int_0^1(1-u)\cdot u^n du=$ $=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$	2p 1p 2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Nicolaescu Nicolae

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	fof=2-3(2-3x)= -4+9x fof este crescătoare (9>0)	3p 2p
2.	$2^x+2^{1-x}=3\Rightarrow 2^x+\frac{2}{2^x}=3$ Notăm $2^x=y>0$ Ecuaţia devine $y^2-3y+2=0$ cu soluţiile $y_1=2,\ y_2=1$ $2^x=2\Rightarrow x_1=1$ şi $2^x=1\Rightarrow x_2=0$	1p 2p 2p
3.	$C_6^1=C_6^5=\frac{6!}{5!1!}=6,\ C_6^2=C_6^4=\frac{6!}{4!2!}=15,\ C_6^3=\frac{6!}{3!3!}=20$ $P=\frac{nr.cazuri\ favorabile}{nr.cazuri\ posibile}=\frac{3}{5}$	3p 2p
4.	$\lvert z\rvert=2\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=2\Rightarrow a^2+b^2=4$ Ecuaţia $a^2+b^2=4$ are în $Z\times Z$ soluţiile $(2,0),(-2,0),(0,2),(0,-2)$	2p 3p
5.	$m_{BC}=\frac{-2-6}{5-0}=\frac{-8}{5}$ $m_{BC}\cdot m_h=-1\Rightarrow m_h=\frac{5}{8}$	1p 2p

www.mateinfo.ro

	Ecuaţia înălţimii $y-3=\frac{5}{8}(x+1)\Rightarrow 5x-8y+29=0$	2p
6.	$\sin x=\pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\pm\frac{2\sqrt{10}}{7}$	2p
	Deoarece $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \sin x>0$	1p
	$\sin 2x=2\sin x\cos x=2\frac{2\sqrt{10}}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{12\sqrt{10}}{49}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=\begin{vmatrix} a^2 & b & c \\ a & b^2 & c \\ a & b & c^2 \end{vmatrix}=abc(abc+2-a-b-c)$	2p
	$abc+2-a-b-c=0$ admite, de exemplu, ca soluţie $a=b=c=1$	3p
b)	Sistemul devine $\begin{cases} 4x+y+z=-1 \\ 2x+y+z=-1 \\ 2x+y+z=-1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 4x+y+z=-1 \\ 2x+y+z=-1 \end{cases}$. Minorul principal este $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$	2p
	x,y necunoscute principale şi z necunoscută secundară şi notăm $z=\alpha$	1p
	Sistemul devine $\begin{cases} 4x+y=-1-\alpha \\ 2x+y=-1-\alpha \end{cases}$ cu soluţia $x=0,\ y=-1-\alpha,\ z=\alpha,\ \alpha\in R$	2p
c)	$x=y=z=1\Rightarrow\begin{cases} a^2+b+c=-1 \\ a+b^2+c=-1 \\ a+b+c^2=-1 \end{cases}$	1p
	Scăzând din prima ecuaţie pe cea de-a doua obţinem $(a-b)(a+b-1)=0$	1p
	I Dacă $a-b=0\Rightarrow a=b$ .Din a doua ecuaţie $c=-1-a-a^2$ şi înlocuit în a treia ecuaţie	

www.mateinfo.ro

	$\Rightarrow a^4+2a^3+3a^2+4a+2=0\Rightarrow (a+1)^2\left(a^2+2\right)=0\Rightarrow a=-1\ \Rightarrow a=b=c=-1$ II Dacă $a+b=1\Rightarrow c^2=-2$ din a treia ecuaţie fals!	2p 1p
2. a)	$(x*y)*z=\left(1-(1-x)^{\log_2(1-y)}\right)*z=\left\{1-\left[1-\left(1-(1-x)^{\log_2(1-y)}\right)\right]^{\log_2(1-z)}\right\}=1-(1-x)^{\log_2(1-y)\log_2(1-z)}$ $x*(y*z)=x*\left(1-(1-y)^{\log_2(1-z)}\right)=\left\{1-(1-x)^{\log_2\left[1-\left(1-(1-y)^{\log_2(1-z)}\right)\right]}\right\}=1-(1-x)^{\log_2(1-y)^{\log_2(1-z)}}=$ $=1-(1-x)^{\log_2(1-y)\log_2(1-z)}$, deci legea este asociativă	2p 2p 1p
b)	Legea este comutativă deoarece, dacă notăm $A=(1-x)^{\log_2(1-y)}$, $B=(1-y)^{\log_2(1-x)}$ şi logaritmăm în baza 2 obţinem $\log_2 A=\log_2 B$ şi datorită injectivităţii funcţiei logaritmice $\log_2 A=\log_2 B\Rightarrow A=B\Rightarrow x*y=y*x$ $x*e=x\Rightarrow 1-(1-x)^{\log_2(1-e)}=x\Rightarrow 1-x=(1-x)^{\log_2(1-e)}$ $\Rightarrow (x\neq 1)\ \log_2(1-e)=1\Rightarrow e=-1\in(-\infty,1)$	2p 2p 1p
c)	$x*x*x=1-(1-x)^{\log_2^2(1-x)}$ (am aplicat asociativitatea legii) $x*x*x=1-(1-x)^{\log_2^2(1-x)}=x\Rightarrow 1-x=(1-x)^{\log_2^2(1-x)}\Rightarrow \log_2^2(1-x)=1$ $\log_2(1-x)=\pm 1\Rightarrow x_1=-1, x_2=\frac{1}{2}$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$x^4-4x+3=x^4-x-3x+3=x\left(x^3-1\right)-3(x-1)=(x-1)\left(x^3+x^2+x-3\right)=(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)$ Cazul $\frac{0}{0}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)}{(x-1)^3}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)}{(x-1)^3}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x^2+2x+3}{x-1}=\frac{6}{-0}=-\infty$	2p 3p

www.mateinfo.ro

b) $f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$ $f'(x)=0\Rightarrow x=1$ — 2p

x	$-\infty$	1	∞
f'(x)	----------	0	++++++++++
f(x)	↘ ↘ ↘ ↘ ↘		↗ ↗ ↗ ↗ ↗

— 2p

Deci f este descrescătoare pe $(-\infty,1)$ — 1p

c) Observăm că m>0 deoarece in caz contrar limita este $+\infty$ — 2p

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{f(x)}-(mx^2+n)=5\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^4-4x+3}-(mx^2+n)=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-4x+3-m^2x^4-2mnx^2-n^2}{\sqrt{x^4-4x+3}+mx^2+n}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4(1-m^2)-2mnx^2-4x+3-n^2}{x^2\left(\sqrt{1-\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^4}}+m+\frac{n}{x^2}\right)}$ — 1p

$1-m^2=0\Rightarrow m=1$ — 2p

$\dfrac{-2n}{2}=5\Rightarrow n=-5$

2. Fie $F:R\to R$ o primitivă a funcţiei f.

a) Atunci $F'(x)=f(x)=\ln(1+e^x)>0$ — 3p

Atunci f este crescătoare pe R — 2p

b) Notăm $\begin{matrix}u(x)=1+e^x=t\\ e^xdx=dt\end{matrix}$ Atunci u(0)=2, u(1)=1+e — 2p

Integrala devine $\int_0^1\ln(1+e^x)e^xdx=\int_2^{e+1}\ln t\,dt=t\ln t\,|_2^{e+1}-\int_2^{e+1}1dt=(e+1)\ln(e+1)-2\ln 2-t\,|_2^{e+1}$ — 2p — 1p

www.mateinfo.ro

	Finalizare I= $=(e+1)\ln(e+1)-2\ln 2+1-e$	
c)	Fie F(t) o primitivă a funcţiei f. Atunci $g(x)=F(t)\|_0^{\ln x}=F(\ln x)-F(0)$ $g'(x)=F'(\ln x)-0=f(\ln x)\cdot(\ln x)'=\ln\left(1+e^{\ln x}\right)\frac{1}{x}=\frac{\ln(1+x)}{x}$	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Nicolaescu Nicolae

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(2x+3yi)-(y-xi)=2+i\Rightarrow(2x-y)+(x+3y)i=2+i$ $\begin{cases}2x-y=2\\x+3y=1\end{cases}$ cu soluţia $x=1,\ y=0$	2p 1p 2p
2.	$\log_3^2 x+\log_3 9x-4=0\Rightarrow\log_3^2 x+\log_3 9+\log_3 x-4=0\Rightarrow\log_3^2 x+\log_3 x-2=0$ Notăm $\log_3 x=y$ Ecuaţia devine $y^2+y-2=0$ cu soluţiile $y_1=1,\ y_2=-2$ $\log_3 x=1\Rightarrow x_1=3,\ \log_3 x=-2\Rightarrow x_2=\frac{1}{9}$	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

3.	$G_f \cap Ox = \phi \Leftrightarrow \Delta < 0$ $\Delta < 0 \Rightarrow 4m^2 - 12m < 0 \Rightarrow m \in (0,3)$	2p 3p
4.	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, ..., \frac{1}{3^8}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice cu raţia $q = \frac{1}{3}$ $S = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^9 - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3^9 - 1}{2 \cdot 3^8}$	2p 3p
5.	$m_{AB} = \frac{2-a}{-4}, m_{CD} = \frac{-a}{2}$ $AB \perp CD \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{CD} = -1$ $\frac{2-a}{-4} \cdot \frac{-a}{2} = -1 \Rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0$ $a_1 = 4, a_2 = -2$	2p 1p 1p 1p
6.	$\sin 135^o = \sin(180-45)^o = \sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 150^o = -\cos(180-30)^o = -\cos 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{6}\sin 135^o}{\cos 150^o} = \frac{\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -2 \in Z$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Observăm că M(x)M(y)=M(x+y), $\forall x,y \in R$ Înmulţirea matricelor este asociativă, deci asociativitatea este verificată pe G. $M(x)M(y) = M(y)M(x) = M(x+y), \forall x, y \in R$, deci înmulţirea matricelor este comutativă pe	1p 1p

www.mateinfo.ro

a)	G Deoarece $M(x)M(0)=M(0)M(x)=M(x),\forall x\in R$,deci elementul neutru este $M(0)=I_2$ $M(x)M(-x)=M(-x)M(x)=M(0),\forall x\in R$ deci orice element M(x) este simetrizabil şi simetricul său este M(-x) Deci $(G,\cdot)$ grup abelian	1p 1p 1p
b)	Considerăm $f:R\to G, f(x)=M(x)$ evident bijectivă $f(x+y)=M(x+y)=M(x)M(y)=f(x)f(y)$ deci f izomorfism Atunci $(R,+)\simeq(G,\cdot)$	2p 2p 1p
c)	$M(x)\cdot M(2x)\cdot\ldots\cdot M(2012x)=M(x+2x+\ldots+2012x)=M(1006\cdot 2013x)$ $\det(M(1006\cdot 2013x))=30^{1006\cdot 2013x}$ $30^{1006\cdot 2013x}=30^{2012}\Rightarrow x=\frac{2}{2013}$	2p 2p 1p
2. a)	$g=X+\hat{3}=X-(-\hat{3})=X-\hat{2}$ $f(\hat{2})=\hat{3}+\hat{3}+\hat{4}=\hat{0}\Rightarrow g/f$	2p 3p
b)	$f=X^3+\hat{2}X^2+\hat{4}=(X+\hat{3})(X^2+\hat{4}X+\hat{3})=(X+\hat{3})(X+\hat{3})(X+\hat{1})$ $f=(X+\hat{3})^2(X+\hat{1})$ descompunerea lui f în $Z_5[X]$	4p 1p
c)	$(\hat{a}x+\hat{b})^2=\hat{4}x^2+x+\hat{1}\Rightarrow \hat{a}^2x^2+\hat{2}\hat{a}\hat{b}x+\hat{b}^2=\hat{4}x^2+x+\hat{1}$ $\hat{a}^2=\hat{4}\Rightarrow\hat{a}=\hat{2}$ *sau* $\hat{a}=\hat{3}$ $\hat{a}=\hat{2}\Rightarrow\hat{4}\hat{b}=\hat{1}\Rightarrow\hat{b}=\hat{4}$ (prima soluţie) $\hat{a}=\hat{3}\Rightarrow\hat{b}=\hat{1}$ (a doua soluţie)	2p 1p 1p 1p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=e^x\left(ax^2+bx+c+2ax+b\right)=e^x\left[ax^2+x(b+2a)+b+c\right]$ $\begin{cases}a=3\\b+2a=7\\b+c=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\\c=2\end{cases}$	2p 3p
b)	Studiem existenţa asimptotei orizontale $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\left(3x^2+x+2\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+x+2}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x+1}{-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6}{e^{-x}}=0$ $y=0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$	1p 3p 1p
c)	$f(\ln x)=6x\Rightarrow e^{\ln x}\left(3\ln^2 x+\ln x+2\right)=6x\Rightarrow x\left(3\ln^2 x+\ln x+2\right)=6x$ $3\ln^2 x+\ln x+2=6\Rightarrow 3\ln^2 x+\ln x-4=0$ cu soluţiile 1 şi $-\dfrac{4}{3}$ $\ln x=1\Rightarrow x_1=e\qquad \ln x=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow x_2=e^{-\frac{4}{3}}$	2p 1p 2p
2. a)	f continuă pe $(-\infty,0)$ şi $(0,\infty)$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}x^2\sin x=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln(x+1)=0$, f(0)=0 deci f continuă in punctul 0 Deci f continuă pe R $\Rightarrow$ f admite primitive pe R	2p 2p 1p
	$\int x^2\sin x\,dx=\int x^2(-\cos x)'\,dx=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx=-x^2\cos x+2\int x(\sin x)'\,dx$ $=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C_1$ $\int\ln(x+1)dx=x\ln(x+1)-\int\dfrac{x}{x+1}dx=x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+C_2$	1p 1p

www.mateinfo.ro

b)	$F(x)=\begin{cases}-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C_1, x\le 0\\ x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+C_2, x>0\end{cases}$ F admite primitive pe R,deci F derivabilă pe R $\Rightarrow$ F continuă pe R $\Rightarrow$ Fcontinuă în 0 $\Rightarrow 2+C_1=C_2$ $F(0)=1\Rightarrow C_1=-1\Rightarrow C_2=1$ Deci $F(x)=\begin{cases}-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x-1, x\le 0\\ x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+1, x>0\end{cases}$	1p 1p 1p
c)	Cazul $\frac{0}{0}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}\overset{\infty}{\overset{l'Hospital}{=}}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(x+1)}{2x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\frac{1}{x+1}}{2}=\frac{1}{2}$	1p 4p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Nicolaescu Nicolae

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$x^3=\frac{x+5x+4}{2}\Rightarrow x^3-3x-2=0$ $(x+1)(x^2-x-2)=0\Rightarrow x_{1,2}=-1, x_3=2$	2p 3p
	$A_n^3=n, n\in N, n\ge 3\Rightarrow n(n-1)(n-2)=6n\Rightarrow n^2-3n-4=0$	2p

www.mateinfo.ro

2.	$n_1 = 4, n_2 = -1 \notin N$ $S = \{4\}$	2p 1p
3.	Condiţii: $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 5x+9 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-\frac{9}{5}, 3\right] = D$ Ridicăm la pătrat ambii membri ai egalităţii $\Rightarrow 3-x+2\sqrt{(3-x)(5x+9)}+5x+9=4 \Rightarrow \sqrt{(3-x)(5x+9)} = 2-2x$ Ridicăm din nou la pătrat ambii membri ai egalităţii $9x^2-14x-23=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=\frac{23}{9} \in D$ dar $x_2 = \frac{23}{9}$ nu verifică ecuaţia deci S={-1}	1p 2p 2p
4.	$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x-\frac{\pi}{4} \in \left\{\pm \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2k\pi, k \in Z\right\}$ $\Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z\right\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in Z\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in Z\right\}$ $x \in [0, 2\pi) \Rightarrow x \in \left\{\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right\}$	2p 2p 1p
5.	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \cdot \cos\left(\measuredangle BAD\right)$ $\cos 75^o = \cos\left(45^o + 30^o\right) = \cos 45^o \cos 30^o - \sin 45^o \sin 30^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \cdot \cos\left(\measuredangle BAD\right) = 24 \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 6\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	2p 2p 1p
6.	$-1 \leq x^2+x+1 \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2+x+2 \geq 0 \\ x^2+x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in R \\ x \in [-1,0] \end{cases}$ În final $x \in [-1,0]$	4p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

www.mateinfo.ro

1.	$A^2=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ -4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 1\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -3\\ 12 & -3\end{pmatrix}$	2p
a)	$-3A=\begin{pmatrix}12 & -3\\ 12 & -3\end{pmatrix}$ deci $A^2=-3A\Rightarrow A\in M$	2p 1p
b)	Fie $A\in M\Rightarrow A^2=-3A$ $\det A^2=\det(-3A)\Rightarrow(\det A)^2=9\det A$ deci $\det A=0$ sau $\det A=9$	1p 2p 2p
c)	$A^2-trA\cdot A+\det A\cdot I_2=O_2$ $-3A-trA\cdot A+\det A\cdot I_2=O_2\Rightarrow -3A-trA\cdot A=O_2\Rightarrow(-3-trA)A=O_2$ $A\neq O_2$ deci $trA=-3$	2p 2p 1p
2.	$m_{AB}=\frac{3-1}{2-(-1)}=\frac{2}{3}, m_{CD}=\frac{-2-0}{-2-1}=\frac{2}{3}\Rightarrow AB\,//\,CD$ (1)	2p
a)	$m_{BC}=\frac{0-3}{1-2}=3, m_{AD}=\frac{-2-1}{-2-(-1)}=3\Rightarrow BC\,//\,AD$ (2) Din (1) şi (2) obţinem că ABCD paralelogram	2p 1p
b)	$A_{ABCD}=2\cdot A_{ABCD}$ $=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{Vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{Vmatrix}=7$	2p 3p
c)	Ecuaţia dreptei BC: $\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-3}{0-3}\Rightarrow 3x-y-3=0\Rightarrow M(\alpha,3\alpha-3)$ $\lvert AM\rvert=\sqrt{(\alpha+1)^2+(3\alpha-4)^2}=\sqrt{5}\Rightarrow 10\alpha^2-22\alpha+17=5$	2p 2p

www.mateinfo.ro

	$\alpha_1=1, \alpha_2=\frac{6}{5}\Rightarrow M\left(\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right)$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{1}{1+\frac{2012}{x}}\cdot\frac{-2012}{x^2}=\frac{-2012}{x(x+2012)}$	2p
	$f''(x)=\frac{4024(x+1006)}{x^2(x+2012)^2}>0$	2p
	Deci f' crescătoare pe domeniul maxim de definiţie	1p
b)	Cazul 1^∞ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f(n)\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\ln\left(1+\frac{2012}{n}\right)\right]^{\frac{1}{\ln\left(1+\frac{2012}{n}\right)}\cdot n\ln\left(1+\frac{2012}{n}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{2012}{n}\right)}$	2p
	$\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{2012}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2012}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\overset{Cazul\ \frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n+2012}\cdot\frac{-2012}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2012n}{n+2012}=2012$	2p
	Rezultatul final este e^{2012}.	1p
c)	f continuă pe [1,2] şi derivabilă pe (1,2)	1p
	Aplicăm teorema lui Lagrange şi rezultă că $\exists c\in(1,2)$ astfel încât $f(2)-f(1)=f'(c)$	1p
	$\ln(1007)-\ln(2013)=\frac{-2012}{c(c+2012)}\Rightarrow\frac{2012}{c(c+2012)}=-\ln\frac{1007}{2013}$	3p
2. a)	$I_1=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(1-3x^2\right)dx=\left(x-x^3\right)\Big\|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{27}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$	5p

www.mateinfo.ro

b)	$I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left[\left(1-3x^2\right)^n - \left(1-3x^2\right)^{n+1} \right] dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(1-3x^2\right)^n 3x^2 dx > 0$	2p
	Deci şirul $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ este descrescător şi deoarece $\left(1-3x^2\right)^n \geq 0 \Rightarrow I_n \geq 0$ deci şirul este mărginit.	2p
	Deoarece şirul este monoton şi mărginit ,rezultă $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ convergent	1p
c)	$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(1-3x^2\right)^n x' dx = x\left(1-3x^2\right)^n \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} - n\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x\left(1-3x^2\right)^{n-1}\left(-6x\right) dx$	1p
	$I_n = -2n\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(1-3x^2\right)^{n-1}\left(1-3x^2-1\right) dx \Rightarrow I_n = -2nI_n + 2nI_{n-1} \Rightarrow I_n(2n+1) = 2nI_{n-1}$	2p
	$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1} I_{n-2} = \frac{4n^2-4n}{4n^2-1} I_{n-2}$	2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Nicolaescu Nicolae

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+i)(2-3i)=5-i$ $\|z\|=\sqrt{26}$	3p 2p
2.	$4^{x+1}-2^{x+2}+1=0 \Rightarrow 4\cdot 4^x-4\cdot 2^x+1=0$ Notăm $2^x=y$ şi obţinem ecuaţia $4y^2-4y+1=0$ $y=\frac{1}{2}\Rightarrow x=-1$	1p 2p 2p
3.	$f_{\min}=\frac{-\Delta}{4a}$ $f_{\min}=\frac{-25}{4}$	2p 3p
4.	$P=\frac{\text{număr de cazuri favorabile}}{\text{număr de cazuri posibile}}$ $P=\frac{13}{90}$	2p 3p
5.	A(2,3) , B(-1,5) $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{13}$	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

	$\cos\frac{5\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	2p
6.	Teorema cosinusului $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\hat{A}=13+6\sqrt{3}$	2p
	$BC=\sqrt{13+6\sqrt{3}}$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$D(x)=\left(2^x+x\right)^2$	3p
	D(x) este pătrat perfect	2p
b)	$D(0)=\left(2^0+0\right)^2=1$	5p
c)	$D(x)=2^{2x}\Rightarrow x(x+2^{x+1})=0$	2p
	$x=0$ *sau* $x=-1$	3p
2.	$(x*y)*z=\sqrt{x^2y^2z^2-3x^2y^2-3x^2z^2-3y^2z^2+9x^2+9y^2+9z^2-24}$	2p
a)	Analog, $x*(y*z)=\sqrt{x^2y^2z^2-3x^2y^2-3x^2z^2-3y^2z^2+9x^2+9y^2+9z^2-24}$	2p
	Legea este asociativă	1p
b)	$x^2e^2-3x^2-3e^2+12=x^2$	2p
	$e^2=4\Rightarrow e=\pm2$	2p
	$e=2\in G$	1p
	$x^2-3x^2-3+12=1$	2p

www.mateinfo.ro

c)	$x=\pm 2$ $x=2\in G$	2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\begin{cases} 1+\frac{2014}{x}>0 \\ x\neq 0 \end{cases}$ $x\in(-\infty,-2014)\cup(0,\infty)$	2p 3p
b)	$f'(x)=\frac{-2014}{x(x+2014)}$	5p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2014}{x}\right)=\ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2014}{x}\right)\right)=\ln 1=0$ y=0 asimptotă orizontală către $+\infty$	3p 2p
2. a)	f continuă pe $(-\infty,0)$ și $(0,\infty)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0)=0$ f continuă pe R, deci f admite primitive pe R	1p 3p 1p
b)	$\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{-1}^{0} xe^x dx=xe^x\Big\vert_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0} e^x dx$ Rezultat final $\frac{2-e}{e}$	2p 3p
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sin^3 x}{x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sin x$ $=1\cdot 0=0$	3p 2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Nicolaescu Nicolae

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left[\sqrt{2014}\right]=44\ \sqrt{\left[\frac{2014}{2013}\right]}=1$ $\left[\sqrt{2014}\right]+\sqrt{\left[\frac{2014}{2013}\right]}=45$	2p 2p 1p
2.	Condiția ca șirul să fie progresie aritmetică $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},\forall n\geq 2$ $5n-3=\frac{5n-8+5n+2}{2}$ deci șirul este o progresie aritmetică	2p 3p
3.	$x_1+x_2=-3,\ x_1x_2=3$ $x_1^2+x_2^2=(-3)^2-2\cdot 3=3$ $\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{3}{3}=1$	2p 2p 1p
4.	$f\circ f=f\Rightarrow 9x+4=1+3x$ $x=-\frac{1}{2}$	3p 2p
	$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow\frac{3}{9}+\sin^2 x=1\Rightarrow\sin x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$	2p

www.mateinfo.ro

5.	$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{6}}{3}$ $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{2}$	2p 1p
6.	$A_{\Delta ABC}=\frac{6\cdot 8\cdot \sin\frac{\pi}{6}}{2}=12$ $A_{\Delta ABO}=\frac{A_{\Delta ABC}}{2}=6$ (BO mediană în triunghiul ABC)	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Determinantul este egal cu $3m^2+3m$	5p
b)	$\det A\neq 0$ $3m^2+3m\neq 0\Rightarrow m\in R-\{-1,0\}$	2p 3p
c)	Pentru m= -1 sistemul devine $\begin{cases}x+2y-3z=1\\-x-y+z=-1\\x+y-z=2\end{cases}$ Adunând ecuația a doua și ecuația a treia obținem 0=1 Sistemul este incompatibil	1p 3p 1p
2. a)	f(0)=1	5p
	$x_1+x_2+x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{-1}{2}\Rightarrow m^2+n^2+m+n=-\frac{1}{2}$	2p

www.mateinfo.ro

b)	$\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=0$ $m=n=-\frac{1}{2}$	2p 1p
c)	$f=X^3-X^2+X+1$ $S=\left[\frac{100\cdot 101}{2}\right]^2-\frac{100\cdot 101\cdot 201}{6}+\frac{100\cdot 101}{2}+100$ S=25.169.300	1p 3p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=-\frac{4028}{(x-2)^2}$	5p
b)	$f'(x)<0$ pe intervalele $(-\infty,2)$ și $(2,\infty)$ deci f descrescătoare pe $(-\infty,2)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2014$ $f(x)<2014, \forall x\in(-\infty,2)$	1p 3p 1p
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} arctg^2\sqrt{x-2}\cdot f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{arctg^2\sqrt{x-2}}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} 2014x$ $=1\cdot 4028=4028$	3p 2p
2. a)	$f'(x)=g(x)$ f este o primitivă a lui g	4p 1p
b)	$\int_1^e g(x)dx=x^3(\ln x-1)\Big\|_1^e=1$	5p

www.mateinfo.ro

c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^3\ln x-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^3=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}-0$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3x^2}{x^6}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{x^3}{-3}=0$	2p 3p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Nicolaescu Nicolae

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Condiţii de existenţă x+2>0, x>0 deci $x\in(0,\infty)$ $\log_2(x+2)\cdot x=3\Rightarrow x^2+2x-8=0$ x=2	2p 2p 1p
2.	$b_5=b_3\cdot q^2\Rightarrow 48=12\cdot q^2\Rightarrow q=\pm 2$ $b_9=b_5\cdot q^4=768$	3p 2p
3.	D=R $2-x=x^3\Rightarrow(x-1)\left(x^2+x+2\right)=0$ x=1	1p 3p 1p

4.	$\frac{i^{2014}}{i+1}=\frac{-1}{i+1}=\frac{-1+i}{2}$ Partea imaginară este egală cu $\frac{i}{2}$	3p 2p
5.	$tg\frac{11\pi}{4}=tg\left(\frac{11\pi}{4}-3\pi\right)=-tg\frac{\pi}{4}$ Rezultat final -1	3p 2p
6.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$ T.Pitagora în triunghiul ABC, obținem AC=10.	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A+xI_2=\begin{pmatrix}2+x & 3\\ 1 & -1+x\end{pmatrix}$ $\det\left(A+xI_2\right)=x^2+x-5$ $x^2+x-2=0, x_1=1, x_2=-2$	1p 2p 2p
b)	Fie $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ Obținem sistemul $\begin{cases}2x+3y=1\\ x-y=2\end{cases}$ $x=\frac{7}{5}, y=-\frac{3}{5}$	2p 3p
c)	$A-xB=\begin{pmatrix}2-2x & 3+x\\ 1-x & -1+x\end{pmatrix}$ $\det\left(A-xB\right)=-x^2+6x-5$ $\forall x\ par \Rightarrow \det\left(A-xB\right) impar$ deci matricea este inversabilă	1p 2p 2p

www.mateinfo.ro

2. a)	$x_1x_2x_3=\frac{-\hat{1}}{m}=\hat{6}m^{-1}$ $\hat{6}m^{-1}=\hat{3}\Rightarrow\hat{3}m=\hat{6}\Rightarrow m=\hat{2}$	2p 3p
b)	$f(\hat{1})=\hat{0}$	5p
c)	Câtul $q=X^2+\hat{3}X+\hat{6}$ Restul $r=\hat{0}$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=e^x+2014$ $f''(x)=e^x>0$ f convexă pe R	2p 2p 1p
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+2014x=-\infty$ deci graficul nu admite asimptotă orizontală $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+2014x}{x}=2014$ $n=0$ y=2014x asimptotă oblică spre $-\infty$	2p 1p 1p 1p
c)	$f'(0)=2015$ $y-1=2015x$ ecuația tangentei	2p 3p
2. a)	$I_1=\frac{\pi-\ln 2-1}{2}$	5p
	$1\le(x+1)^n\le 2^n,\ \forall x\in[0,1]$	1p

www.mateinfo.ro

b)	$\int_0^1 arctgxdx \le I_n \le \int_0^1 2^n arctgxdx$ $\frac{\pi}{4}-\ln 2 \le \frac{\pi-\ln 4}{4} \le I_n \le 2^n\left(\frac{\pi-\ln 4}{4}\right) \le 2^n\frac{\pi}{4}$	2p 2p
c)	$A=\int_0^{\frac{1}{2}} arctg2xdx = xarctg2x\Big\|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x\frac{2}{1+4x^2}dx$ $A=\frac{\pi-2\ln 2}{8}$	2p 3p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Oancea Cristina

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{(-m)^2-4m}{4m}=4\Rightarrow -m^2+4m=16m$ $\Rightarrow -m^2=12m\Leftrightarrow m=-12$	3p 2p
2.	Notam cu t=$3^x\Rightarrow 2t^2-3t+1=0$ $\Delta=3^2-2\cdot 4\cdot 1=1$ $x_1=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$ $x_2=\frac{3+1}{4}=1$	1p 2p 2p
3.	$\overrightarrow{M}(\frac{2+10}{4};\frac{3+17}{4})=\overrightarrow{M}(3;5)$	1p 2p 2p
4.	$\frac{3}{a}=\frac{2}{6}\Rightarrow a=9$	2p

www.mateinfo.ro

		3p
5.	$\sin 135^\circ = \sin(180-135)^\circ = \sin 45^\circ$ $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$	2p 3p
6.	$tgx + 2ctgx = 3ctgx \Rightarrow tgx = ctgx$ $\Rightarrow x = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$m \cdot 1 - 2 + 4 = 4 \Rightarrow m - 2 = 0$ $\Rightarrow m = 2$	2p 2p 1p
b)	$\Delta = -2m - 4 - 6 + 24 + 2m + 1 = 15 \neq 0$	3p 2p
c)	$15 < 16$	1p 2p 2p

www.mateinfo.ro

2. a)	$\left(\frac{-12}{6}\right)^2-2\cdot\frac{6}{6}=4-2=2$	1p 3p 1p
b)	a=14, b=10	3p 2p
c)	$2\cdot(x+2)(3\cdot x+1)\cdot(x^2+1)$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+6x+9}{x^2+5x}=1$ $n=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+6x+9-x^2-5x}{x+5})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+9}{x+5}=$ $y=1\cdot x+1=x+1$	2 p 2 p 1 p

www.mateinfo.ro

b)	$\frac{(2x+6)(x+5)-(x^2+6x+9)}{(x+5)^2}$	1 p
	$=\frac{2x^2+10x+6x+30-x^2-6x-9}{(x+5)^2}\Leftrightarrow$	1 p
	$\frac{x^2+10x+21}{(x+5)^2}=0\Rightarrow x_1=3;\mathrm{x}_2=7$	1 p 2 p
c)	$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$	1 p
	$f(x_0)=\mathrm{y}_0\Rightarrow y_0=\frac{9}{5}$	1 p
	$y-\frac{9}{5}=\frac{21(x-0)}{5}\Rightarrow y=\frac{9}{5}+\frac{21x}{5}$	1 p 2 p
2. a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^x+1=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2-x=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x=0}} 2-x\Rightarrow$	2 p
	$e^0+1=2-0=2-0=1+1=2=2$	2 p
	$2=2=2$	1 p

www.mateinfo.ro

b)	$\pi\int_0^1 (2-x)^2 dx = \pi\int_0^1 (4-4x+x^2)dx$	1 p
	$= \pi(4x-2x^2+\frac{x^3}{3})\Big\|_0^1 = \pi\cdot(2+\frac{1}{3}) = \pi\cdot\frac{7}{3}$	1 p 1 p 2 p
c)	$\int_0^1 x\cdot(2-x)dx = \int_0^1 2x-x^2 dx = \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big\|_0^1$	2 p
	$= 1-\frac{1}{3}+\zeta = \frac{2}{3}+\zeta$	1 p 2 p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Oancea Cristina

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{3^{2015}-1}{2}\cdot\frac{2}{3^{2015}-1}=1$	3p 2p
2.	$A_5^4=\frac{5!}{(5-4)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1}=120$	1p 2p 2p
3.	$\left[(1-i)^2\right]^{1007}+\left[(i+1)^2\right]^{1007}$ $=(-2i)^{1007}+(2i)^{1007}=2+2=4$	1p 2p 2p

www.mateinfo.ro

4.	$\Delta = 25-24 = 1$ $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{4}$ $\frac{-b}{2a} = \frac{5}{2} \Rightarrow V(\frac{-1}{4};\frac{5}{2})$	2p 3p
5.	$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 3\cdot \cos 30^\circ = 2\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$	2p 3p
6.	$\sin 35^\circ + \cos 35^\circ - \cos 35^\circ - \sin 35^\circ$ $\cos 145^\circ = -\cos(180-145)^\circ = -\cos 35^\circ$ $\sin 145^\circ = \sin(180-145)^\circ = \sin 35^\circ$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix} + \ldots\ldots\ldots \begin{pmatrix} 5^{2014} & 0 \\ 0 & 5^{2014} \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \frac{5^{2015}-2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{5^{2015}-2}{4} \end{pmatrix} = \frac{5^{2015}-2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

b)	$\det A = 5\cdot 5 - 0\cdot 0 = 25$ $A^t = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$	3p 2p
c)	$5^{2n} = 3\cdot 5^{2n} - 1250$ $-2\cdot 5^{2n} = -1250$ $5^{2n} = 625 \Rightarrow n = 2$	1p 2p 2p
2. a)	$C = x^3 + 6x + 4$ $restul = 0$	1p 3p 1p
b)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 64 - 12 = 52$	3p 2p
c)	$f(x) = (x-8)\cdot(x^3+6x+4)$	2p 2

www.mateinfo.ro

		p 1 p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$(x^2-1)\cdot \ln x+2\cdot x\cdot \ln x-\frac{(x^2-1)}{x}=0$ $\frac{x\cdot \ln x(x^2+2x-1)-x^2-1}{x}=0$ $\Rightarrow x=1$	2p 2p 1p
b)	$f(x)\searrow (-\infty;1)$ $f(x)\nearrow (1;+\infty)$	1p 1p 1p 2p
c)	$y-y_0=f'(1)(x-1)$ $y_0=f(1)=0$ $f'(1)=0$ $y=0$	1p 1p

www.mateinfo.ro

		1 p 2 p
2. a)	$\int_{-2}^{2}\frac{x+3-5}{x+3}dx=\int_{-2}^{2}\frac{x+3}{x+3}dx-\int_{-2}^{2}\frac{-5}{x+3}dx$ $=\int_{-2}^{2}1dx+5\int_{-2}^{2}\frac{1}{x+3}dx=x\Big\vert_{-2}^{2}+5\cdot\ln\lvert x+3\rvert\Big\vert_{-2}^{2}$ $=2+2+5\cdot\ln\lvert 5\rvert-5\cdot\ln\lvert 1\rvert=4+5\cdot\ln\lvert 5\rvert+\zeta$ $\int_{-2}^{2}x-2dx=\frac{x^2}{2}-2x\Big\vert_{-2}^{2}=\frac{4}{2}-4-\frac{4}{2}-4=-8$	2 p 2 p 1 p
b)	$\int_{-2}^{2}x-2dx=\frac{x^2}{2}-2x\Big\vert_{-2}^{2}$ $=\frac{4}{2}-4-\frac{4}{2}-4=-8+\wp$	1 p 1 p 1 p 2 p

www.mateinfo.ro

c)	$\pi\int_0^2\left[\frac{(x-2)^2}{x+3}\cdot x+3\right]^2 dx$ $=\pi\int_0^2(x-2)^4dx=\pi\int_0^2 1\cdot(x-2)^4dx$ $u(x)=x-2\Rightarrow u'(x)=1$ $\Rightarrow\pi\frac{(x-2)^5}{5}\Big\vert_0^2=\pi\cdot\frac{(-2)^5}{5}$	2 p 1 p 2 p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Oancea Cristina

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$A_n^1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot .....(n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot .....(n-1)} = n$ $C_n^1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot .....(n-1)\cdot n}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot .....(n-1)} = n$ $n+n=36 \Rightarrow 2n=36 \Rightarrow n=18$	3p 2p
2.	$215+\frac{10}{100}\cdot 215 = 215+21,5 = 236,5$	1p 2p 2p
3.	$(\sqrt{6})^2 < 3^2 < (\sqrt{12})^2$	1p 2p 2p

www.mateinfo.ro

4.	$-11 \le 3 \cdot x + 2 \le 11$ $-13 \le 3 \cdot x \le 9$ $\Rightarrow \frac{-13}{3} \le x \le 3$ $x \in \left[\frac{-13}{3}; 3\right]$	2p 3p
5.	m=0 m=2	2p 3p
6.	$\cos 120^\circ = -\cos(180-120)^\circ = -\cos 60^\circ$ $\cos 110^\circ = -\cos(180-110)^\circ = -\cos 70^\circ$ $\cos 100^\circ = -\cos(180-100)^\circ = -\cos 80^\circ$ $\cos 60^\circ + \cos 70^\circ + \cos 80^\circ$ $-\cos 80^\circ - \cos 70^\circ - \cos 60^\circ = 0$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2 = \begin{pmatrix} 20 & -17 \\ 72 & 25 \end{pmatrix}$ $B^2 = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ -56 & -23 \end{pmatrix}$ $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 32 & -12 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}$	2 p 2 p 1 p
b)	Det(A+B)=8 · 8=64 Det(A)=38	3 p 2

www.matemfo.ro

	Det(B)=30 $\Rightarrow Det(A+B) \neq Det(\mathrm{A}) + \mathrm{Det(B)}$	p
c)	$C = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8^2 & 0 \\ 0 & 8^2 \end{pmatrix} + \ldots\ldots \begin{pmatrix} 8^{2014} & 0 \\ 0 & 8^{2014} \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \frac{8^{2014}-2}{7} & 0 \\ 0 & \frac{8^{2014}-2}{7} \end{pmatrix} = \frac{8^{2014}-2}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $= \frac{8^{2014}-2}{7} \cdot I_2$	1 p 2 p 2 p
2. a)	$C = x^2 - 5x + 6$ $restul = 0$	1 p 3 p 1 p
b)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 81 - 2 \cdot 26 = 81 - 52 = 29$	3 p 2 p
c)	(x-4)(x-3)(x-2)	2 p 2

www.mateinfo.ro

		p 1 p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{-3}{x^2}-\frac{3}{(x+2)^2}\Rightarrow f'(1)=-\frac{10}{3}$	2p 2p 1p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+2)^3+x^3}{x^3\cdot(x+2)^3}=\frac{1}{\infty}=0$	1p 1p 1p 2p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty} x^4\cdot\left[\frac{-3\cdot(x^2+4x+4)-3x^2}{x^2\cdot(x+2)^2}\right]$ $=\lim\limits_{x\to\infty} x^4\cdot\frac{(-12x+12)}{x^4+4\cdot x^3+4x^2}$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-12x^4(x-1)}{x^4+4x^3\_4x^2}=-12$	1p 1p 1p 2p

www.mateinfo.ro

2. a)	$\int_0^3 (x-3)^2 dx = \int_0^3 x^2 - 6x + 9 dx = \frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 9x \Big\|_0^3$ $= \frac{27}{3} - 6\frac{9}{2} + 9 \cdot 3 = 9 - 27 + 27 = 9 + \wp$	2p 2p 1p
b)	$\int_0^3 (x-3)^{2014} dx = \frac{(x-3)^{2015}}{2015} \Big\|_0^3 = \frac{3^{2015}}{2015} + \wp$	1p 1p 1p 2p
c)	$\int_0^3 x \cdot f_n(x) dx$ $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ $g(x) = (x-3)^n \Rightarrow g(x) = \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}$ $x \cdot \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} - \int_0^3 \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} dx$ $= \frac{x \cdot (x-3)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(x-3)^{n+2}}{n+2} \Big\|_0^3 =$ $= \frac{-(-3)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \wp$	2p 1p 2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Oláh Csaba

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$r=3$ raţia progresiei, atunci $x=1+3(n-1)=3n-2$	1p
	$1+4+7+...+3n-2=\frac{n}{2}\cdot(3n-1)\Rightarrow n(3n-1)=290$, $n=10$	2p
	$x=3n-2=30-2=28$.	2p
2.	Din relaţiile lui *Viete* $x_1+x_2=m+1$ şi $x_1\cdot x_2=m\Rightarrow m\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-1\right)=m\frac{x_1+x_2-x_1x_2}{x_1x_2}=$	2p
	$=\cancel{m}\cdot\frac{\cancel{m}+1-\cancel{m}}{\cancel{m}}=1$ nu depinde de m.	3p
3.	Împărţind ecuaţia la $\sqrt{2}$, se obţine $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=1\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin\frac{\pi}{2}$, $x\in[0,2\pi]$	3p
	atunci $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$.	2p
4.	$T_{k+1}=C_{150}^k\left(\sqrt{a}\right)^{150-k}\left(\frac{4}{\sqrt[3]{a}}\right)^k=C_{150}^k a^{\frac{150-k}{2}}\cdot 4^k\cdot a^{\frac{-k}{3}}=C_{150}^k 4^k\cdot a^{\frac{450-5k}{6}}$, termenul nu conţine $a\Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow\frac{450-5k}{6}=0\Rightarrow 5k=450\Rightarrow k=90$,	1p
	termenul fără a: $T_{91}=C_{150}^{90}4^{90}$.	2p
5.	$\begin{vmatrix}1 & 2m+1 & 1\\ 2 & 9 & 1\\ 4 & 4m+1 & 1\end{vmatrix}=0\overset{\substack{l_2-l_1\\ l_3-l_1}}{\Rightarrow}\begin{vmatrix}1 & 2m+1 & 1\\ 1 & 8-2m & 0\\ 3 & 2m & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 8-2m\\ 3 & 2m\end{vmatrix}=0$	3p

www.mateinfo.ro

	adică $8m=24\Rightarrow m=3$	2p
6.	$\cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1}{1+64}=\frac{1}{65}\Rightarrow$	3p
	$\overset{x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)}{\Rightarrow}\ \cos x=-\frac{\sqrt{65}}{65}$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det V(1,2,3)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}\overset{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1}}{=}\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&2\\1&3&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\3&8\end{vmatrix}=8-6=2$	4p
	$=2$.	1p
b)	$V(a,b,c)\cdot {}^tV(a,b,c)=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{pmatrix}=$	3p
	$=\begin{pmatrix}3&a+b+c&a^2+b^2+c^2\\a+b+c&a^2+b^2+c^2&a^3+b^3+c^3\\a^2+b^2+c^2&a^3+b^3+c^3&a^4+b^4+c^4\end{pmatrix}$.	2p
c)	$x^3-3x+2=x^3-x-2x+2=\underbrace{x\left(x^2-1\right)}_{=(x-1)(x+1)}-2(x-1)=(x-1)\left(x^2+x-2\right)=(x-1)^2(x+2)$,	3p
	$x_1=x_2=1, x_3=-2\Rightarrow \det V(1,1,-2)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-2\\1&1&4\end{vmatrix}\overset{c_1=c_2}{=}0$.	2p
2. a)	$f(k)=k(k+3)(k+1)(k+2)=\underbrace{\left(k^2+3k\right)}_{=t}\underbrace{\left(k^2+3k+2\right)}_{=t}=t(t+2)=$	2p
	$=t^2+2t>t^2$, dar $t^2+2t=(t+1)^2-1<(t+1)^2$,	3p
	$\left(k^2+3k\right)^2<f(k)<\left(k^2+3k+1\right)^2\Rightarrow f(k)\neq m^2, m\in Z$	1p
b)	$f(k)=-1\Leftrightarrow\left(k^2+3k\right)^2+2\left(k^2+3k\right)+1=0\Rightarrow$	2p

www.mateinfo.ro

	$\Rightarrow \left(k^2+3k+1\right)^2=0$, de unde $k^2+3k+1=0$	1p
	$k\in\left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.	2p
c)	$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}k(k+3)=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k=$	2p
	$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\left(\frac{2n+1}{3}+3\right)=$	2p
	$=\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$.	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-5)(x-1)(x+3)(x+7)}{(x-1)(x-4)}=$	2p
	$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-5)(x+3)(x+7)}{x-4}=\frac{-4\cdot 4\cdot 8}{-3}=\frac{128}{3}$.	3p
b)	Funcţia f se scrie $f(x)=(x-5)(x+7)(x-1)(x+3)=\left(x^2+2x-35\right)\left(\underbrace{x^2+2x-3}_{=t}\right)=(t-32)t=$	
	$=t^2-\underbrace{32}_{=2\cdot 16}t+16^2-16^2=(t-16)^2-256=\left(x^2+2x-19\right)^2-256$	3p
	$f'(x)=2\left(x^2+2x-19\right)(2x+2)=4(x+1)\left(x^2+2x-19\right)$ $f'(2)=4\cdot 3\cdot(4+4-19)=-44\cdot 3$, $f(2)=-3\cdot 5\cdot 9=-45\cdot 3$	2p
	$\frac{f'(2)}{f(2)}=\frac{-44\cdot 3}{-45\cdot 3}=\frac{44}{45}$.	
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow 4(x+1)\left(x^2+2x-19\right)=0\Rightarrow x+1=0\Rightarrow x_1=-1$, sau	2p

www.mateinfo.ro

	$x^2+2x-19=0$, $x_{2,3}=-1\pm 2\sqrt{5}$	2p
	$x\in\left\{-1-2\sqrt{5},-1,-1+2\sqrt{5}\right\}$ toate trei rădăcini sunt reale.	1p
2. a)	$f(x)=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}=\dfrac{x^4+2x^2+1-x^2}{x^2-x+1}=\dfrac{\left(x^2+1\right)-x^2}{x^2-x+1}=$	2p
	$=\dfrac{\left(x^2+1-x\right)\left(x^2+1+x\right)}{x^2-x+1}=x^2+x+1$	1p
	$\int f(x)\,dx=\int\left(x^2+x+1\right)dx=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+C$.	2p
b)	$H'(x)=h(x)=x^2+x+1+\dfrac{1}{x^2+x+1}>0\Rightarrow$	3p
	$\Rightarrow H$ este o funcţie crescătoare.	2p
c)	$\int_0^1\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_0^1\left(x^2+x+1\right)dx+\int_0^1\dfrac{1}{x^2+x+1}dx=(*)$	1p
	$\int_0^1\dfrac{1}{x^2+x+1}dx=\int_0^1\dfrac{1}{x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}dx=\int_0^1\dfrac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg\|_0^1=$	2p
	$=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(\underbrace{arctg\sqrt{3}}_{=\frac{\pi}{3}}-\underbrace{arctg\dfrac{\sqrt{3}}{3}}_{=\frac{\pi}{6}}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{18}=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}$	1p
	$(*)=\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Bigg\|_0^1+\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}=\dfrac{11}{6}+\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}$.	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

www.mateinfo.ro

Prof: Oláh Csaba

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+i)^{100}=\left[\frac{(1+i)^2}{2i}\right]^{50}=(2i)^{50}=2^{50}\underbrace{\left(i^2\right)}_{=-1}^{25}=-2^{50}$, în mod similar	3p
	$(1-i)^{100}=-2^{50}\Rightarrow(1+i)^{100}+(1-i)^{100}=-2^{50}-2^{50}=-2^{51}\in Z$.	2p
2.	$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-4x+5=4x-7\Rightarrow x^2-8x+12=0$, $x_1=2, x_2=6$	2p
	$g(2)=1$ şi $g(6)=17$	2p
	Punctele de întâlnire $A(2,1)$ şi $B(6,17)$.	1p
3.	$3-2\sqrt{2}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\left(=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-1}\right)$, ecuaţia se poate scrie $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x+\frac{1}{\left(3+2\sqrt{2}\right)^x}=2$, dar	2p
	$\left(3+2\sqrt{2}\right)^x+\frac{1}{\left(3+2\sqrt{2}\right)^x}\geq 2, x\in R\Rightarrow\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-x}\Rightarrow x=-x$, adică $x=0$.	3p
4.	Cifre, numere prime, sunt $2,3,5,7$, numere de 3 cifre prime distincte $A_4^3=4!=24$	2p
	În total sunt 900 numere de 3 cifre	1p
	Probabilitatea $p=\frac{24}{900}=\frac{2}{75}$.	2p
5.	$\vec{u}+\vec{v}=\vec{i}+(2m+1)\vec{j}$, $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|=\sqrt{1+(2m+1)^2}=\sqrt{4m^2+4m+2}$	2p
	$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|=\sqrt{2}\Rightarrow 4m^2+4m+2=2$, adică $4m(m+1)=0$ de unde	2p
	$m\in\{-1,0\}$.	1p
6.	$AB=4\cdot 3$, $BC=4\cdot 4$ iar $AC=4\cdot 5$, sunt numere pitagorice $\Rightarrow ABC$ este triunghi dreptunghic	

www.mateinfo.ro

	cu ipotenuza $AC=20$,	3p
	$R=\frac{AC}{2}=\frac{20}{2}=10$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A(m)=\begin{vmatrix} m-1 & -1 & 0 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(m-1)(m+1)$	3p
	$rangA(m)=3\Rightarrow m\in R\setminus\{-1,1\}$.	2p
b)	Socotind $A^{-1}(m)$ obţinem $A^{-1}(m)=\frac{1}{m^2-1}\cdot\begin{pmatrix} m+1 & 1 & -1 \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & m^2-1 \end{pmatrix}$	3p
	$A^{-1}(2)=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.	2p
c)	$\det\left[A(m)\cdot A(m-1)\right]=\det A(m)\cdot\det A(m-1)=(m-2)(m+1)(m-1)m=$	1p
	$=(m^2-m-2)(m^2-m)=(m^2-m)^2-2(m^2-m)+1-1=$	
	$=(m^2-m-1)^2-1$	2p
	$\det\left[A(m)\cdot A(m-1)\right]=-1\Leftrightarrow(m^2-m-1)^2-1=-1$, adică $m^2-m-1=0$, de unde	
	$m_{1,2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $m_{3,4}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.	2p
2. a)	Folosind relaţiile lui *Viete*, putem scrie $\sum_{i=1}^{5}x_i=2$, $\sum_{1\le i<j\le 5}x_ix_j=6$, unde $x_i, i=\overline{1,5}$ sunt rădăcinile polinomului	2p
	$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=\left(\sum_{i=1}^{5}x_i\right)^2-2\sum_{1\le i<j\le 5}x_ix_j=4-12=-8<0$, dacă toate x_i ar fi fost reale, rezultatul ar fi fost pozitiv, rezultă ca nu toate rădăcinile sunt reale.	2p 1p

www.mateinfo.ro

b)	Aplicând schema lui *Horner*, se găseşte rădăcina $x=2$.	5p
c)	Tot cu schema lui *Horner* obţinem $f=(X-2)(X^4+6X^2+5)$ $X^4+6X^2+5=X^4+X^2+5X^2+5=X^2(X^2+1)+5(X^2+1)=(X^2+1)(X^2+5)$, deci $f=(X-2)(X^2+1)(X^2+5)$, radicinile complexe $\pm i,\pm i\sqrt{5}$ toate patru diferite.	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)=\frac{2x^2+8x+x+4-4+1}{x+4}=\frac{2x(x+4)}{x+4}+\frac{x+4}{x+4}-\frac{3}{x+4}=$ $=2x+1-\frac{3}{x+4}\Rightarrow f'(x)=2+\frac{3}{(x+4)^2}>0$ f este crescătoare pe domeniul maxim de definiţie.	1p 2p 2p
b)	Cum în a). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x+4}=0$, $y=2x+1$ este ecuatia asimptotei oblice Asimptota orizontala nu există iar asimptota verticală este $x=-4$.	3p 2p
c)	$\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2x}\cdot\left(2x+1-\frac{3}{x+4}\right)=1+\frac{1}{2x}-\frac{3}{2x^2+8x}=1+\frac{x+1}{2x^2+8x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{2x}\right)^{2x+1}=1^{\infty}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{2x}\right)^{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{x+1}{2x^2+8x}\right)^{\frac{2x^2+8x}{x+1}}}_{\to e}\right]^{\frac{x+1}{2x^2+8x}\cdot(2x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{2x^2+8x}}=$ $=e$.	2p 1p 2p

www.mateinfo.ro

2. a)	$I_1=\int_0^1 \frac{x+1-1}{1+x}dx=\int_0^1 \frac{x+1}{1+x}dx-\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx=\left(x-\ln(1+x)\right)\Big\vert_0^1=$ $=1-\ln 2=\ln\frac{e}{2}.$	3p 2p
b)	$I_{n+1}=\int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n-x^n}{1+x}dx=\int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}dx-\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx=$ $=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_0^1-\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx=\frac{1}{n+1}-I_n.$	3p 2p
c)	Folosind formula din b). se poate scrie $I_6=\frac{1}{6}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1+I_1=\frac{10-12+15-20+30-60}{60}+\ln\frac{e}{2}=\ln\frac{e}{2}-\frac{37}{60}$ $=\ln\frac{e}{2}-\frac{37}{60}.$	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Oláh Csaba

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z+\frac{1}{z}=i,\ z^4+\frac{1}{z^4}=\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-2=\left[\underbrace{\left(z+\frac{1}{z}\right)}_{=i}^2-2\right]^2-2=$	3p

www.mateinfo.ro

	$=(-3)^2-2=7$.	2p
2.	$(f\circ g)(x)=g^2(x)-6g(x)+8$ $g^2(x)-6g(x)+8=0\Rightarrow g(x)=2, g(x)=4$ $g(x)=2\Rightarrow 2x-6=2\Rightarrow x=4$, $g(x)=4\Rightarrow 2x-6=4\Rightarrow x=5$ $x\in\{4,5\}$.	1p 2p 1p 1p
3.	$x>1$, $\log_{x+1}(x-1)=\dfrac{1}{\log_{x-1}(x+1)}$, ecuaţia se poate scrie aşa $\log_{x+1}(x-1)+\dfrac{1}{\log_{x+1}(x-1)}=2$, dar $\log_{x+1}(x-1)+\dfrac{1}{\log_{x+1}(x-1)}\geq 2\Rightarrow$ $\Rightarrow \log_{x+1}(x-1)=\dfrac{1}{\log_{x+1}(x-1)}=1\Rightarrow x-1=x+1$, ecuaţia nu are rezolvare in R.	1p 2p 2p
4.	Se cunoaşte identitatea $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$, $2048=2^{11}\Rightarrow n=11$.	2p 3p
5.	$\overrightarrow{AB}(-1,2)$, $\overrightarrow{BC}(1,2)$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-1\cdot 1+2\cdot 2=3$.	2p 3p
6.	$2(\sin a+\sin b)(\sin a-\sin b)=2(\sin^2 a-\sin^2 b)=$ $=2\left(\dfrac{1-\cos 2a}{2}-\dfrac{1-\cos 2b}{2}\right)=\cos 2b-\cos 2a$.	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	După relaţiile lui *Viete* $x_1+x_2+x_3=0$, $D\overset{c_1+c_2}{\underset{c_1+c_3}{=}}\begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3\\ x_1+x_2+x_3 & x_1 & x_2\\ x_1+x_2+x_3 & x_3 & x_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3\\ 0 & x_1 & x_2\\ 0 & x_3 & x_1\end{vmatrix}=0$.	2p 3p

www.mateinfo.ro

b)	Cum $x_1+x_2+x_3=0$,	2p
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=3x_1x_2x_3=-15$.	3p
c)	$\begin{vmatrix} x & 2-x & x-3 \\ x-3 & x & 2-x \\ 2-x & x-3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2-x+x-3 & 2-x & x-3 \\ x-3+x+2-x & x & 2-x \\ \underbrace{2-x+x-3+x}_{=x-1} & x-3 & x \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 2-x & x-3 \\ 1 & x & 2-x \\ 1 & x-3 & x \end{vmatrix} \overset{l_2-l_1}{\underset{l_3-l_1}{=}}$	1p
	$(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 2-x & x-3 \\ 0 & 2x-2 & 5-2x \\ 0 & 2x-5 & 3 \end{vmatrix} = (x-1)\left(6x-6+4x^2-20x+25\right) = (x-1)\left(4x^2-14x+19\right)$	2p
	$\begin{vmatrix} x & 2-x & x-3 \\ x-3 & x & 2-x \\ 2-x & x-3 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)\left(\underbrace{4x^2-14x+19}_{\Delta<0}\right) = 0 \Rightarrow x=1$.	2p
2. a)	$x*y=(x-4)(y-4)+4$,	1p
	$x*e=x \Rightarrow (x-4)(e-4)+4=x \Rightarrow (x-4)(e-4)=x-4 \Rightarrow e-4=1,\ e=5$	2p
	$x*x'=e \Rightarrow (x-4)(x'-4)+4=5 \Rightarrow x'=\frac{1}{x-4}+4=\frac{4x-15}{x-4}$.	2p
b)	$x*b=b*x=b \Rightarrow (x-4)(b-4)+4=b \Rightarrow (x-4)(b-4)=b-4 \Rightarrow (b-4)(x-5)=0$, de unde	3p
	$b=4$.	2p
c)	Din b). se ştie că $4*x=x*4=4$	2p
	$x^4*\underbrace{4^4*4}_{=4}+4^x=5 \Leftrightarrow \underbrace{x^4*4}_{=4}+4^x=5 \Leftrightarrow 4^x+4=5$, de unde $4^x=1$	2p
	$x=0$.	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$a_n=\frac{n^3+3n^2+3n+1-n^3}{\left[n(n+1)\right]^3}=\frac{(n+1)^3}{n^3(n+1)^3}-\frac{n^3}{n^3(n+1)^3}=\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}$	2p

www.mateinfo.ro

	$b_n = a_n + \frac{1}{(n+1)^3} = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^3} = \frac{1}{n^3}$.	1p
	$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^3}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 < 1 \Rightarrow b_n$ este un şir descrescător.	2p
b)	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot n^4 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4\left(3n^2+3n+1\right)}{\left[n(n+1)\right]^3} =$	2p
	$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^6\left(3+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^6\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 3$.	3p
c)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}\right) =$	1p
	$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1^3} \underbrace{-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}}_{=0} \underbrace{-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}}_{=0} \underbrace{-\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}}_{=0} - \frac{1}{(n+1)^3}\right) =$	2p
	$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^3}\right) = 1$.	2p
2. a)	$I_1 = \int \frac{1+tg^2x}{1-tgx}dx = \int \frac{1}{1-tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx \overset{1-tgx=u}{=} -\int \frac{du}{u} =$	3p
	$= -\ln\lvert u\rvert + C = -\ln\lvert tgx-1\rvert + C$.	2p
b)	$I_2 = \int \frac{1+tg^2x}{1-tg^2x}dx = -\int \frac{1}{tg^2x-1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx \overset{tgx=u}{=} -\int \frac{1}{u^2-1}du =$	3p
	$= -\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{u-1}{u+1}\right\rvert + C = -\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{tgx-1}{tgx+1}\right\rvert + C$.	2p
c)	$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} f_4(x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+tg^2x}{1-tg^4x}dx$	1p

www.mateinfo.ro

	$\frac{1}{1-tg^4x}=-\frac{1}{\left(tg^2x-1\right)\left(tg^2x+1\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{tg^2x+1}-\frac{1}{tg^2x-1}\right).$	1p
	$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f_4(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+tg^2x}{tg^2x+1}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{tg^2x-1}\cdot\frac{1}{\cos^2x}dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{tgx-1}{tgx+1}\right\rvert\right)\Big\rvert_0^{\frac{\pi}{6}}=$	2p
	$=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{tg\frac{\pi}{6}-1}{tg\frac{\pi}{6}+1}\right\rvert-\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{4}\ln 1=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}+3}.$	1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1.

Prof: Oláh Csaba.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$r=3$ raţia progresiei, atunci $x=1+3(n-1)=3n-2$	1p
	$1+4+7+...+3n-2=\frac{n}{2}\cdot(3n-1)\Rightarrow n(3n-1)=290$, $n=10$	2p
	$x=3n-2=30-2=28$.	2p
2.	Din relaţiile lui *Viete* $x_1+x_2=m+1$ şi $x_1\cdot x_2=m\Rightarrow m\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-1\right)=m\frac{x_1+x_2-x_1x_2}{x_1x_2}=$	2p
	$=\cancel{m}\cdot\frac{m+1-m}{\cancel{m}}=1$ nu depinde de m.	3p
3.	Împărţind ecuaţia la $\sqrt{2}$, se obţine $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=1\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin\frac{\pi}{2}$, $x\in[0,2\pi]$	3p
	atunci $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$.	2p
4.	$T_{k+1}=C_{150}^k\left(\sqrt{a}\right)^{150-k}\left(\frac{4}{\sqrt[3]{a}}\right)^k=C_{150}^k a^{\frac{150-k}{2}}\cdot 4^k\cdot a^{\frac{-k}{3}}=C_{150}^k 4^k\cdot a^{\frac{450-5k}{6}}$, termenul nu conţine $a\Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow\frac{450-5k}{6}=0\Rightarrow 5k=450\Rightarrow k=90$,	1p
	termenul fără a: $T_{91}=C_{150}^{90}4^{90}$.	2p
5.	$\begin{vmatrix}1 & 2m+1 & 1\\ 2 & 9 & 1\\ 4 & 4m+1 & 1\end{vmatrix}=0\overset{l_2-l_1}{\underset{l_3-l_1}{\Rightarrow}}\begin{vmatrix}1 & 2m+1 & 1\\ 1 & 8-2m & 0\\ 3 & 2m & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 8-2m\\ 3 & 2m\end{vmatrix}=0$	3p

www.mateinfo.ro

	adică $8m=24\Rightarrow m=3$	2p
6.	$\cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1}{1+64}=\frac{1}{65}\Rightarrow$	3p
	$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ $\Rightarrow \cos x=-\frac{\sqrt{65}}{65}$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det V(1,2,3)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}\overset{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1}}{=}\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&2\\1&3&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\3&8\end{vmatrix}=8-6=2$	4p
	$=2$.	1p
b)	$V(a,b,c)\cdot {}^tV(a,b,c)=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{pmatrix}=$	3p
	$=\begin{pmatrix}3&a+b+c&a^2+b^2+c^2\\a+b+c&a^2+b^2+c^2&a^3+b^3+c^3\\a^2+b^2+c^2&a^3+b^3+c^3&a^4+b^4+c^4\end{pmatrix}$.	2p
c)	$x^3-3x+2=x^3-x-2x+2=\underbrace{x\left(x^2-1\right)}_{=(x-1)(x+1)}-2(x-1)=(x-1)\left(x^2+x-2\right)=(x-1)^2(x+2)$,	3p
	$x_1=x_2=1, x_3=-2\Rightarrow \det V(1,1,-2)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-2\\1&1&4\end{vmatrix}\overset{c_1=c_2}{=}0$.	2p
2. a)	$f(k)=k(k+3)(k+1)(k+2)=\left(\underbrace{k^2+3k}_{=t}\right)\left(\underbrace{k^2+3k+2}_{=t}\right)=t(t+2)=$	2p
	$=t^2+2t>t^2$, dar $t^2+2t=(t+1)^2-1<(t+1)^2$,	3p
	$\left(k^2+3k\right)^2<f(k)<\left(k^2+3k+1\right)^2\Rightarrow f(k)\neq m^2, m\in Z$.	2p
b)	$f(k)=1\Leftrightarrow\left(k^2+3k\right)^2+2\left(k^2+3k\right)+1=0\Rightarrow$	2p

www.mateinfo.ro

	$\Rightarrow \left(k^2+3k+1\right)^2=0$, de unde $k^2+3k+1=0$	1p
	$k\in\left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.	2p
c)	$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}k(k+3)=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k=$	2p
	$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\left(\frac{2n+1}{3}+3\right)=$	2p
	$=\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$.	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-5)(x-1)(x+3)(x+7)}{(x-1)(x-4)}=$	2p
	$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-5)(x+3)(x+7)}{x-4}=\frac{-4\cdot 4\cdot 8}{-3}=\frac{128}{3}$.	3p
b)	Funcţia f se scrie $f(x)=(x-5)(x+7)(x-1)(x+3)=\left(x^2+2x-35\right)\left(\underbrace{x^2+2x-3}_{=t}\right)=(t-32)t=$	
	$=t^2-\underbrace{32}_{=2\cdot 16}t+16^2-16^2=(t-16)^2-256=\left(x^2+2x-19\right)^2-256$	3p
	$f'(x)=2\left(x^2+2x-19\right)(2x+2)=4(x+1)\left(x^2+2x-19\right)$ $f'(2)=4\cdot 3\cdot(4+4-19)=-44\cdot 3$, $f(2)=-3\cdot 5\cdot 9=-45\cdot 3$	2p
	$\frac{f'(2)}{f(2)}=\frac{-44\cdot 3}{-45\cdot 3}=\frac{44}{45}$.	
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow 4(x+1)\left(x^2+2x-19\right)=0\Rightarrow x+1=0\Rightarrow x_1=-1$, sau	2p

www.mateinfo.ro

	$x^2+2x-19=0$, $x_{2,3}=-1\pm 2\sqrt{5}$	2p
	$x\in\left\{-1-2\sqrt{5},-1,-1+2\sqrt{5}\right\}$ toate trei rădăcini sunt reale.	1p
2. a)	$f(x)=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}=\dfrac{x^4+2x^2+1-x^2}{x^2-x+1}=\dfrac{\left(x^2+1\right)-x^2}{x^2-x+1}=$	2p
	$=\dfrac{\left(x^2+1-x\right)\left(x^2+1+x\right)}{x^2-x+1}=x^2+x+1$	1p
	$\int f(x)\,dx=\int\left(x^2+x+1\right)dx=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+C$.	2p
b)	$H'(x)=h(x)=x^2+x+1+\dfrac{1}{x^2+x+1}>0\Rightarrow$	3p
	$\Rightarrow H$ este o funcţie crescătoare.	2p
c)	$\int_0^1\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_0^1\left(x^2+x+1\right)dx+\int_0^1\dfrac{1}{x^2+x+1}dx=(*)$	1p
	$\int_0^1\dfrac{1}{x^2+x+1}dx=\int_0^1\dfrac{1}{x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}dx=\int_0^1\dfrac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg\|_0^1=$	2p
	$=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(\underbrace{arctg\sqrt{3}}_{=\frac{\pi}{3}}-\underbrace{arctg\dfrac{\sqrt{3}}{3}}_{=\frac{\pi}{6}}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{18}=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}$	1p
	$(*)=\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Bigg\|_0^1+\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}=\dfrac{11}{6}+\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}$.	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2.

Prof: Oláh Csaba

www.mateinfo.ro

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+i)^{100}=\left[\frac{(1+i)^2}{2i}\right]^{50}=(2i)^{50}=2^{50}\underbrace{\left(i^2\right)}_{=-1}^{25}=-2^{50}$, în mod similar	3p
	$(1-i)^{100}=-2^{50}\Rightarrow(1+i)^{100}+(1-i)^{100}=-2^{50}-2^{50}=-2^{51}\in Z$.	2p
2.	$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-4x+5=4x-7\Rightarrow x^2-8x+12=0$, $x_1=2, x_2=6$	2p
	$g(2)=1$ şi $g(6)=17$	2p
	Punctele de întâlnire $A(2,1)$ şi $B(6,17)$.	1p
3.	$3-2\sqrt{2}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\left(=(3+2\sqrt{2})^{-1}\right)$, ecuaţia se poate scrie $(3+2\sqrt{2})^x+\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^x}=2$, dar	2p
	$(3+2\sqrt{2})^x+\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^x}\geq 2, x\in R\Rightarrow(3+2\sqrt{2})^x=(3+2\sqrt{2})^{-x}\Rightarrow x=-x$, adică $x=0$.	3p
4.	Cifre, numere prime, sunt $2,3,5,7$, numere de 3 cifre prime distincte $A_4^3=4!=24$	2p
	În total sunt 900 numere de 3 cifre	1p
	Probabilitatea $p=\frac{24}{900}=\frac{2}{75}$.	2p
5.	$\vec{u}+\vec{v}=\vec{i}+(2m+1)\vec{j}$, $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|=\sqrt{1+(2m+1)^2}=\sqrt{4m^2+4m+2}$	2p
	$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|=\sqrt{2}\Rightarrow 4m^2+4m+2=2$, adică $4m(m+1)=0$ de unde	2p
	$m\in\{-1,0\}$.	1p
6.	$AB=4\cdot 3$, $BC=4\cdot 4$ iar $AC=4\cdot 5$, sunt numere pitagorice $\Rightarrow ABC$ este triunghi dreptunghic	3p
	cu ipotenuza $AC=20$,	

www.mateinfo.ro

	$R=\frac{AC}{2}=\frac{20}{2}=10$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A(m)=\begin{vmatrix} m-1 & -1 & 0 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(m-1)(m+1)$	3p
	$rangA(m)=3\Rightarrow m\in R\setminus\{-1,1\}$.	2p
b)	Socotind $A^{-1}(m)$ obţinem $A^{-1}(m)=\frac{1}{m^2-1}\cdot\begin{pmatrix} m+1 & 1 & -1 \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & m^2-1 \end{pmatrix}$	3p
	$A^{-1}(2)=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.	2p
c)	$\det\left[A(m)\cdot A(m-1)\right]=\det A(m)\cdot\det A(m-1)=(m-2)(m+1)(m-1)m=$	1p
	$=(m^2-m-2)(m^2-m)=(m^2-m)^2-2(m^2-m)+1-1=$	
	$=(m^2-m-1)^2-1$	2p
	$\det\left[A(m)\cdot A(m-1)\right]=-1\Leftrightarrow(m^2-m-1)^2-1=-1$, adică $m^2-m-1=0$, de unde	
	$m_{1,2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $m_{3,4}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.	2p
2. a)	Folosind relţiile lui *Viete*, putem scrie $\sum_{i=1}^{5}x_i=-2$, $\sum_{1\le i<j\le 5}x_ix_j=6$, unde $x_i, i=\overline{1,5}$ sunt rădăcinile polinomului	2p
	$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=\left(\sum_{i=1}^{5}x_i\right)^2-2\sum_{1\le i<j\le 5}x_ix_j=4-12=-8<0$, dacă toate x_i ar fi fost reale, rezultatul ar fi fost pozitiv $\Rightarrow$ nu toate rădăcinile sunt reale.	2p 1p
b)	Aplicând schema lui *Horner*, se găseşte rădăcina $x=2$.	5p

www.mateinfo.ro

c)	Tot cu schema lui *Horner* obţinem $f=(X-2)(X^4+6X^2+5)$ $X^4+6X^2+5=X^4+X^2+5X^2+5=X^2(X^2+1)+5(X^2+1)=(X^2+1)(X^2+5)$, deci $f=(X-2)(X^2+1)(X^2+5)$, radicinile complexe $\pm i,\pm i\sqrt{5}$ toate patru diferite.	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)=\frac{2x^2+8x+x+4-4+1}{x+4}=\frac{2x(x+4)}{x+4}+\frac{x+4}{x+4}-\frac{3}{x+4}=$ $=2x+1-\frac{3}{x+4}\Rightarrow f'(x)=2+\frac{3}{(x+4)^2}>0$ f este crescătoare pe domniul maxim de definiţie.	1p 2p 2p
b)	Cum în a). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x+4}=0$, $y=2x+1$ este ecuatia asimptotei oblice Asimptota orizontala nu există iar asimptota verticală $x=-4$.	3p 2p
c)	$\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2x}\cdot\left(2x+1-\frac{3}{x+4}\right)=1+\frac{1}{2x}-\frac{3}{2x^2+8x}=1+\frac{x+1}{2x^2+8x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{2x}\right)^{2x+1}=1^{\infty}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{2x}\right)^{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{x+1}{2x^2+8x}\right)^{\frac{2x^2+8x}{x+1}}}_{\to e}\right]^{\frac{x+1}{2x^2+8x}(2x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{2x^2+8x}}=$ $=e$.	2p 1p 2p
2. a)	$I_1=\int_0^1\frac{x+1-1}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x+1}{1+x}dx-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\left(x-\ln(1+x)\right)\Big\vert_0^1=$	3p

www.mateinfo.ro

	$=1-\ln 2=\ln\frac{e}{2}$.	2p
b)	$I_{n+1}=\int_0^1\frac{x^{n+1}+x^n-x^n}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^n(x+1)}{1+x}dx-\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=$ $=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_0^1-\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\frac{1}{n+1}-I_n$.	3p 2p
c)	Folosind formula din b). se poate scrie $I_6=\frac{1}{6}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1+I_1=\frac{10-12+15-20+30-60}{60}+\ln\frac{e}{2}=\ln\frac{e}{2}-\frac{37}{60}$ $=\ln\frac{e}{2}-\frac{37}{60}$.	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3.

Prof: Oláh Csaba.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z+\frac{1}{z}=i$, $z^4+\frac{1}{z^4}=\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-2=\left[\left(\underbrace{z+\frac{1}{z}}_{=i}\right)^2-2\right]^2-2=$ $=(-3)^2-2=7$.	3p 2p
2.	$(f\circ g)(x)=g^2(x)-6g(x)+8$	1p

www.mateinfo.ro

	$g^2(x)-6g(x)+8=0 \Rightarrow g(x)=2, g(x)=4$ $g(x)=2 \Rightarrow 2x-6=2 \Rightarrow x=4$, $g(x)=4 \Rightarrow 2x-6=4 \Rightarrow x=5$ $x \in \{4,5\}$.	2p 1p 1p
3.	$x>1$, $\log_{x+1}(x-1)=\frac{1}{\log_{x-1}(x+1)}$, ecuaţia se poate scrie aşa $\log_{x+1}(x-1)+\frac{1}{\log_{x+1}(x-1)}=2$, dar $\log_{x+1}(x-1)+\frac{1}{\log_{x+1}(x-1)} \geq 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \log_{x+1}(x-1)=\frac{1}{\log_{x+1}(x-1)}=1 \Rightarrow x-1=x+1$, ecuaţia nu are rezolvare in R.	1p 2p 2p
4.	Se cunoaşte identitatea $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n$, $2048=2^{11} \Rightarrow n=11$.	2p 3p
5.	$\overrightarrow{AB}(-1,2)$, $\overrightarrow{BC}(1,2)$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-1\cdot 1+2\cdot 2=3$.	2p 3p
6.	$2(\sin a+\sin b)(\sin a-\sin b)=2(\sin^2 a-\sin^2 b)=$ $=2\left(\frac{1-\cos 2a}{2}-\frac{1-\cos 2b}{2}\right)=\cos 2b-\cos 2a$.	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	După relaţiile lui *Vierte* $x_1+x_2+x_3=0$, $D \underset{c_1+c_3}{\overset{c_1+c_2}{=}} \begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3 \\ x_1+x_2+x_3 & x_1 & x_2 \\ x_1+x_2+x_3 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = 0$.	2p 3p
b)	Cum $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3x_1x_2x_3=-15$.	2p 3p

www.mateinfo.ro

c)	$\begin{vmatrix} x & 2-x & x-3 \\ x-3 & x & 2-x \\ 2-x & x-3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2-x+x-3 & 2-x & x-3 \\ x-3+x+2-x & x & 2-x \\ \underbrace{2-x+x-3+x}_{=x-1} & x-3 & x \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 2-x & x-3 \\ 1 & x & 2-x \\ 1 & x-3 & x \end{vmatrix} =$	**1p**
	$(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 2-x & x-3 \\ 0 & 2x-2 & 5-2x \\ 0 & 2x-5 & 3 \end{vmatrix} = (x-1)\left(6x-6+4x^2-20x+25\right) = (x-1)\left(4x^2-14x+19\right)$	**2p**
	$\begin{vmatrix} x & 2-x & x-3 \\ x-3 & x & 2-x \\ 2-x & x-3 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)\left(\underbrace{4x^2-14x+19}_{\Delta<0}\right) = 0 \Rightarrow x = 1.$	**2p**
2.	$x * y = (x-4)(y-4)+4,$	1p
a)	$x * e = x \Rightarrow (x-4)(e-4)+4 = x \Rightarrow (x-4)(e-4) = x-4 \Rightarrow e-4 = 1,\ e = 5$	2p
	$x * x' = e \Rightarrow (x-4)(x'-4)+4 = 5 \Rightarrow x' = \frac{1}{x-4}+4 = \frac{4x-15}{x-4}.$	2p
b)	$x*b = b*x = b \Rightarrow (x-4)(b-4)+4 = b \Rightarrow (x-4)(b-4) = b-4 \Rightarrow (b-4)(x-5) = 0$, de unde	3p
	$b = 4.$	2p
c)	Din b). se ştie că $4*x = x*4 = x$	2p
	$x^4 * \underbrace{4^4 * 4}_{=4} + 4^x = 5 \Leftrightarrow \underbrace{x^4 * 4}_{=4} + 4^x = 5 \Leftrightarrow 4^x + 4 = 5$, de unde $4^x = 1$	2p
	$x = 0.$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	$a_n = \frac{n^3+3n^2+3n+1-n^3}{\left[n(n+1)\right]^3} = \frac{(n+1)^3}{n^3(n+1)^3} - \frac{n^3}{n^3(n+1)^3} = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}$	2p
a)	$b_n = a_n + \frac{1}{(n+1)^3} = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^3} = \frac{1}{n^3}$.	1p

www.mateinfo.ro

	$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^3}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^3<1\Rightarrow b_n$ este un şir descrescător.	2p
b)	$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot n^4=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4\left(3n^2+3n+1\right)}{\left[n(n+1)\right]^3}=$	2p
	$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^6\left(3+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^6\left(1+\frac{1}{n}\right)}=1.$	3p
c)	$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}\right)=$	1p
	$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^3}-\underbrace{\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}}_{=0}-\underbrace{\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}}_{=0}-\underbrace{\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}}_{=0}-\frac{1}{(n+1)^3}\right)=$	2p
	$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^3}\right)=1.$	2p
2. a)	$I_1=\int\frac{1+tg^2x}{1-tgx}dx=\int\frac{1}{1-tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2x}dx\overset{1-tgx=u}{=}-\int\frac{du}{u}=$	3p
	$=\ln\lvert u\rvert+C=-\ln\lvert tgx-1\rvert+C.$	2p
b)	$I_2=\int\frac{1+tg^2x}{1-tg^2x}dx=-\int\frac{1}{tg^2x-1}\cdot\frac{1}{\cos^2x}dx\overset{tgx=u}{=}-\int\frac{1}{u^2-1}du=$	3p
	$=-\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{u-1}{u+1}\right\rvert+C=-\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{tgx-1}{tgx+1}\right\rvert+C.$	2p
c)	$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}f_4(x)\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+tg^2x}{1-tg^4x}dx$	1p
	$\frac{1}{1-tg^4x}=-\frac{1}{(tg^2x-1)(tg^2x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{tg^2x+1}-\frac{1}{tg^2x-1}\right).$	1p

www.mateinfo.ro

	$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f_4(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+tg^2x}{tg^2x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{tg^2x-1}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{tgx-1}{tgx+1}\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} =$	2p
	$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg\frac{\pi}{6}-1}{tg\frac{\pi}{6}+1}\right| - \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{4}\ln 1 = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}+3}.$	1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof:Păcurar Cornel-Cosmin

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$-9 \le 2x-1 \le 9$ $-4 \le x \le 5$ $cardA = 10$	2p 1p 2p
2.	$2x-1 = 3x^2-3x+1$ $x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{3}$ Punctele de intersecție sunt $(1;1)$ și $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$	1p 2p 2p
3.	$8-3x = 8-12x+6x^2-x^3$ $x\left(x^2-6x+9\right)=0$ $x_1 = 0, x_{2,3} = 3$	1p 1p 3p
4.	$T_{k+1} = (-1)^k C_{2012}^k 2^{2012-k} \cdot \sqrt{3}^k, k \in \{0,1,2,...,2012\}$ $T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow k$ par Sunt 1007 termeni raționali	2p 2p 1p
5.	$BC: x+y-2=0$	2p 3p

www.mateinfo.ro

	Distanța este $\frac{\lvert 1+2-2\rvert}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	
6.	$\cos 2x=2\cos^2 x-1\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1=\frac{1}{2}$	2p
	$\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	2p
	$x\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -m & m^2\\ -m & m^2 & 1\\ m^2 & 1 & -m\end{vmatrix}=-\left(m^2-m+1\right)^2\left(m+1\right)^2$	3p
	Finalizare : $m=-1$	2p
b)	Dacă sistemul are soluții nenule,atunci $\Delta=0$	2p
	În acest caz, sistemul se reduce la $x+y+z=0$	1p
	Această ecuație nu are soluții cu toate componentele strict pozitive	2p
c)	Pentru $m=-1$, rangul este 1	2p
	Pentru $m\neq -1$, rangul este 3	3p
2. a)	$(x*y)*z=\frac{1}{9}(x-2)(y-2)(z-2)+2$ și $x*(y*z)=\frac{1}{9}(x-2)(y-2)(z-2)+2$	4p
	Finalizare: legea este asociativă	1p
b)	Trebuie să arătăm că există $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	1p
	$x*e=x\Leftrightarrow 2x+2e-ex+2=3x\Leftrightarrow(e+1)(2-x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$, deci $e=-1$	3p
	Verificarea relației $(-1)*x=x,\forall x\in\mathbb{R}$	1p
c)	$x*x*x*x=-\frac{1}{27}(x-2)^4+2$	2p

www.mateinfo.ro

	$x*x*x*x=-1 \Leftrightarrow (x-2)^4=81 \Leftrightarrow x=5$ sau $x=-1$	3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(-x)=-x^3+3x+2012$	2p
	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+2012}{-x^3+3x+2012}=-1$	3p
b)	$f'(x)=3x^2-3$	2p
	$f'(x)\geq 0, \forall x\in[1;\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1;\infty)$	3p
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, f(-1)=2014, f(1)=2010, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$	2p
	Din studiul variației funcției deducem că ecuația $f(x)=m$ are trei soluții reale distincte dacă și numai dacă $m\in(2010;2014)$	3p
2. a)	$I_2=\int_{2012}^{2013}\dfrac{(y-2012)^2}{y}dy$	2p
	$I_2=\left(\dfrac{y^2}{2012}-4024y+2012^2\ln y\right)\Big\|_{2012}^{2013}$	2p
	$I_2=\dfrac{4025}{2012}-4024\cdot 4025+2012^2\ln\dfrac{2013}{2012}$	1p
b)	$I_n-I_{n+1}=\int_0^1\dfrac{x^n}{x+2012}\cdot(1-x)dx\geq 0$ pentru orice n, $\Rightarrow I_{n+1}\leq I_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$	2p
	$I_{n+1}+2012I_n=\int_0^1\dfrac{x^n(x+2012)}{x+2012}dx=\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$	3p
c)	$\dfrac{1}{2013(n+1)}\leq I_n\leq\dfrac{1}{2012(n+1)}$	3p

www.mateinfo.ro

	Finalizare: $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Păcurar Cornel-Cosmin

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$1+i-2i+2-9+6i=$	3p
	$-6+5i$	2p
2.	$x^2-x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}, x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-2;+\infty)$	1p
	$x^2-x+1=x^2+4x+4$	2p
	$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{5}\in[-2;+\infty)$	2p
3.	$x-\frac{\pi}{3}=2k\pi\pm\arccos\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$	2p
	$x\in[0;2\pi)\Rightarrow x_1=0, x_2=\frac{2\pi}{3}$	3p
4.	În A avem 6 elemente impare şi 5 elemente pare	2p
	Finalizare : $C_6^3\cdot C_5^1=100$ de moduri	3p

www.mateinfo.ro

5.	Fie D e mijlocul lui $[BC] \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 2 \end{cases}$	2p
	$AD = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$	3p
6.	$\frac{1}{\sin x \cos x} = 3 \Leftrightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{3}$	3p
	$\sin 2x = \frac{2}{3}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A(x)\cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y & x^2-2xy+y^2 \\ 0 & 1 & -2y-2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	2p
	$A(x)\cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y & (x-y)^2 \\ 0 & 1 & -2(x+y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$	3p
b)	$A(x)-A(y) = \begin{pmatrix} 0 & x-y & x^2-y^2 \\ 0 & 0 & -2x+2y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1p
	$(A(x)-A(y))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2(x-y)^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2p
	$(A(x)-A(y))^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$	2p
c)	$A(x)\cdot A(-x) = A(-x)\cdot A(x) = I_2$	3p
	$\Rightarrow (A(x))^{-1} = A(-x)$	2p

www.mateinfo.ro

2. a)	$R=f(2i)=(4i)^{10}$ $R=-4^{10}$	3p 2p
b)	$f=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}x^{10-k}(2i)^{k}+\sum_{k=0}^{10}(-1)^{k}C_{10}^{k}x^{10-k}(2i)^{k}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}x^{10-k}(2i)^{k}\left(1+(-1)^{k}\right)$ $a_{2k}=2\cdot(-1)^{k}C_{10}^{10-2k}\cdot 2^{10-2k}\in\mathbb{R},\forall k\in\{0,1,...,5\},a_{2k+1}=0,\forall k\in\{0,1,...,4\}$	2p 3p
c)	Fie z o rădăcină a lui $f\Rightarrow(z+2i)^{10}=-(z-2i)^{10}\Rightarrow\lvert z+2i\rvert=\lvert z-2i\rvert$ Punctul de afix z este egal depărtat de punctele de afixe $\pm i$, deci aparţin axei reale	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=-\frac{4}{(x+2)(x-2)}\prec 0,\forall x\in(2;+\infty)$ $\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(2;+\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x\to\infty}f(x)=0\Rightarrow d_1:y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ $\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}f(x)=+\infty\Rightarrow d_2:x=2$ este asimptotă verticală la dreapta	3p 2p
c)	$\lim_{x\to\infty}x\cdot f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{4}{x-2}\right)}{\frac{4}{x-2}}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x-2}$ $\lim_{x\to\infty}x\cdot f(x)=4$	3p 2p
2. a)	$\int_1^9 f(\sqrt{x})dx=\int_1^9\left(x-4\sqrt{x}+3\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{8x\sqrt{x}}{3}-3x\right)\Big\rvert_1^9$ $\int_1^9 f(\sqrt{x})dx=-\frac{16}{3}$	3p 2p

www.mateinfo.ro

b)	$g(x)\le 0,\forall x\in[1;3]$	1p
	$\Rightarrow A=-\int_1^3 g(x)\,dx=-\int_1^3\left(x-4+\frac{3}{x}\right)dx$	1p
	$A=-\left(\frac{x^2}{2}-4x+3\ln x\right)\Big\vert_1^3$	2p
	$A=28-\ln 27$	1p
c)	$I_n=\int_1^3 f^n(x)\,dx=-2n\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)^{n-1}\cdot\left(x^2-2x\right)dx$	1p
	$I_n=-2n\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)^{n-1}\cdot\left(x^2-4x+3+2x-4+1\right)dx$	1p
	$I_n=-2n\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)^{n}dx-2n\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)^{n-1}dx-2n\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)^{n-1}\cdot(2x-4)\,dx$	1p
	$\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)^{n-1}\cdot(2x-4)\,dx=\int_0^0 t^{n-1}dt=0$	1p
	$\Rightarrow I_n=-2nI_n-2nI_{n-1}\Rightarrow(2n+1)I_n+2nI_{n-1}=0$	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Păcurar Cornel-Cosmin

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$b_1+b_3=5$ şi $b_3+b_5=20\Leftrightarrow b_1\left(1+q^2\right)=5$ şi $\Leftrightarrow b_1q^2\left(1+q^2\right)=20$	2p

www.mateinfo.ro

	$\Rightarrow q^2=4\Leftrightarrow q=\pm 2$	2p
	$q\succ 0\Rightarrow q=2$	1p
2.	$\Delta\geq 0\Leftrightarrow a^2-8a+4\geq 0$	3p
	Finalizare: $a\in\left(-\infty,4-2\sqrt{3}\right]\cup\left[4+2\sqrt{3},+\infty\right)-\{0\}$	2p
3.	$2x-3\succ 0, x-1\succ 0, 5-2x\succ 0\Leftrightarrow x\in\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$	1p
	$\ln\frac{4x^2-12x+9}{x-1}=\ln(5-2x)\Leftrightarrow 6x^2-19x+14=0$	2p
	$x_1=2\in\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right), x_2=\frac{7}{6}\notin\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$	2p
4.	$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}, A_n^2=n(n-1)$	1p
	$\frac{n(n-1)}{2}+n(n-1)=63\Leftrightarrow n(n-1)=42$	3p
	$n\in\mathbb{N}\Rightarrow n=7$	1p
5.	$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=2011^2-2012^2\prec 0$	3p
	$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=2011^2-2012^2\prec 0$	2p
	$\Rightarrow$ vectorii $\vec{v_1},\vec{v_2}$ formează un unghi obtuz	
6.	$C=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$	1p
	$\frac{AB}{\sin C}=2R$	2p
	$\sin C=\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1p
	Finalizare: $R=6\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	1p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$a+1+1=5 \Leftrightarrow a=3$	2p
	$4-1-3=b \Leftrightarrow b=0$	2p
	$2+3+4=9$ este adevărat	1p
b)	Sistemul este incompatibil dacă $\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0$ și $\Delta_c=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 4 \\ b & -1 & -3 \end{vmatrix}\neq 0$	3p
	$\Rightarrow a=3, b\neq 0$	2p
c)	Pentru $b=7$ avem sistemul $\begin{cases} ax+y+z=5 \\ 2x+3y+4z=9 \\ 4x-y-3z=7 \end{cases}$ care este compatibil pentru orice $a\in\mathbb{R}$	3p
	$(0,11,-6)$ este soluția cu toate componentele întregi , $\forall a\in\mathbb{Z}$	2p
2. a)	Rădăcinile întregi ale lui f se găsesc printre divizorii lui 10	2p
	$f(2)=0\Rightarrow x=2\in\mathbb{Z}$ e rădăcină a lui f	3p
b)	$x_1+x_2+\ldots+x_5=2, x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_4x_5=-1$	2p
	$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_5^2=(x_1+x_2+\ldots+x_5)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_4x_5)=2^2-2\cdot(-1)=6$	1p
	$(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_1-x_5)^2+(x_2-x_3)^2+\ldots+(x_4-x_5)^2=$ $=4(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_5^2)-2(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_4x_5)=18$	2p
c)	$f=(X-2)\left[(X^2-1)^2+(X+2)^2\right]$	2p
	$(x^2-1)^2+(x+2)^2\succ 0, \forall x\in\mathbb{R}$	2p
	$\Rightarrow f$ are o singură soluție reală	1p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=3x^2+1001\succ 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ strict crescătoare $\Rightarrow f$ injectivă	2p
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ și f este continuă,deci f surjectivă	2p
	Va rezulta că ecuația $f(x)=y$ are soluție unică, $\forall y\in\mathbb{R}$	1p
b)	$h(x)=x^3+1001x-20014-\dfrac{1}{n+2012}$	1p
	$h(2)\prec 0,h(3)\succ 0\Rightarrow x_n\in(2;3)$	1p
	$x_{n+1}^3-x_n^3\prec 0\Rightarrow x_{n+1}-x_n\prec 0$	1p
	$\Rightarrow (x_n)$ convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\in[2;3]$	
	$(x_n-2)\left(x_n^2+2x_n+1007\right)=\dfrac{1}{n+2012}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$	2p
c)	$n(x_n-2)=\dfrac{n}{\left(x_n^2+2x_n+1007\right)\cdot(n+2012)}$	3p
	$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n-2)=\dfrac{1}{1015}$	2p
2. a)	$F'(x)=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{2011}-1}{x-1},x\neq 1\\ 2011,x=1\end{cases}$	2p
	$x\prec 1\Rightarrow x^{2011}-1\prec 0,x-1\prec 0\Rightarrow\dfrac{x^{2011}-1}{x-1}\succ 0$	1p
	$x\succ 1\Rightarrow x^{2011}-1\succ 0,x-1\succ \theta 0\Rightarrow\dfrac{x^{2011}-1}{x-1}\succ 0$	1p
	$\Rightarrow F'(x)\succ 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow F$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	1p
b)	$F(x)=x+\dfrac{x^2}{2}+\ldots+\dfrac{x^{2011}}{2011}$	1p

www.mateinfo.ro

	$\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=-\infty, F$ continuă $\Rightarrow \text{Im}\, F=\mathbb{R}\Rightarrow F$ surjectivă Din a) $\Rightarrow F$ injectivă Deci F bijectivă	2p 1p 1p
c)	Cu schimbarea de variabilă $F^{-1}(x)=t\Leftrightarrow x=F(t)\Rightarrow dx=f(t)\,dt$ $\int_0^a F^{-1}(x)dx=\int_0^1 tf(t)dt=\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\ldots+\frac{t^{2013}}{2013}\right)\Big\vert_0^1=$ $=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2013}$	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Pascotescu Camelia

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt{49}+\sqrt[3]{-1000}+(\sqrt{3})^2=\sqrt{7^2}+\sqrt[3]{(-10)^3}+3=$	3p
	$=7+(-10)+3=0$	2p
2.	Din **Relaţiile lui Viète** avem $x_1+x_2=-\frac{m}{1}=-m$ şi $x_1x_2=\frac{-m+1}{1}=-m+1$	2p
	Relaţia dată devine $-2m+(-m+1)=3$	1p
	$m=-\frac{2}{3}$	2p
3.	$3^{4x}=3^{x^2}$	1p
	$4x=x^2$	2p
	$x_1=0, x_2=4$	2p
4.	Se impun condiţiile $2x-1\geq 0$ şi $2-x\geq 0$,de unde $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$	2p 2p
	Ecuaţia devine $2x-1=4-4x+x^2$ cu soluţiile $x_1=1, x_2=5$	1p
	Având în vedere că $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$, soluţia ecuţiei este $x=1$	
6.	$\sin^2 x+\cos^2 x=1$	2p
	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=\frac{1}{9}$	1p
	$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow \sin x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$	2p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

. a)	Folosind **Regula triunghiului:**	
	$\det A = 4a + 3a^2 + 18 - 9a - 2a^2 - 12 =$	3p
	$= a^2 - 5a + 6$	2p
b)	Matricea este inversabilă pentru $\det A \neq 0$	2p
	$\det A = 0 \Leftrightarrow a \in \{2,3\}$	2p
	A este inversabilă pentru $x \in \mathbb{R} - \{2,3\}$	1p
c)	$\det A = 2 \neq 0 \Rightarrow$ **Sistem Cramer**	2p
	Sistemul are soluţia unică $x = 0, y = 1, z = 0$.	3p
2.	a şi b pot lua fiecare 5 valori.	3p
a)	Obţinem $5 \cdot 5 = 25$ matrice.	2p
b)	Fie $A = \begin{pmatrix} \hat{0} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & a \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \hat{0} & c & d \\ \hat{0} & \hat{1} & c \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in H$.	2p
	Atunci $A \cdot B = \begin{pmatrix} \hat{1} & a+c & d+ac+b \\ \hat{0} & \hat{1} & a+c \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in H$.	3p
c)	Fie $X = \begin{pmatrix} \hat{0} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & a \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in H$. Atunci $X^3 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{3}a & \hat{3}a^2 + \hat{3}b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{3}a \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.	3p
	$X^3 = I_3 \Rightarrow \hat{3}a = 0 \Rightarrow a = \hat{0}$ şi $\hat{3}a^2 + \hat{3}b = \hat{0} \overset{a=\hat{0}}{\Rightarrow} \hat{3}b = 0 \Rightarrow b = \hat{0}$	2p
	Deci $X = I_3 \in H$.	1p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\dfrac{(\ln x)'\cdot\sqrt{x}-\ln x\cdot(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}=$	2p
	$=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$	3p
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow\ln x=2\Leftrightarrow x=e^2$	2p
	Din tabelul de variaţie rezultă că f este strict crescătoare pe $(0;e^2)$ şi strict descrescătoare pe $(e^2;\infty)$.	3p
c)	Deoarece $3,5\in(0;e^2)$ şi $3<5$, cum funcţia este strict crescătoare pe $(0;e^2)$, avem $f(3)<f(5)$.	3p 2p
	Atunci $\dfrac{\ln 3}{\sqrt{3}}<\dfrac{\ln 5}{\sqrt{5}}\Rightarrow\sqrt{5}\ln 3<\sqrt{3}\ln 5\Rightarrow\ln 3^{\sqrt{5}}<\ln 5^{\sqrt{3}}\Rightarrow 3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$	
2. a)	$I_1=\int_0^1\dfrac{x}{x^2+1}\,dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx=\dfrac{1}{2}\ln\left\|x^2+1\right\|_0^1=\dfrac{1}{2}\ln 2$	2p
	$I_2=\int_0^1\dfrac{x^2}{x^2+1}\,dx=\int_0^1\dfrac{x^2+1-1}{x^2+1}=\int_0^1\left(1-\dfrac{1}{x^2+1}\right)dx=\left(x-\operatorname{arctg}x\right)\Big\|_0^1=1-\dfrac{\pi}{4}$	3p
b)	$I_{n+1}+I_n=\int_0^1\dfrac{x^{2n+2}+x^{2n}}{x^2+1}\,dx=\int_0^1\dfrac{x^{2n}(x^2+1)}{x^2+1}\,dx=\int_0^1 x^{2n}\,dx$	3p
	$I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{n+1}$	2p
c)	Deoarece $0\le\dfrac{x^{2n}}{x^2+1}\le x^{2n}$, rezultă	2p 1p
	$0\le\int_0^1\dfrac{x^{2n}}{x^2+1}\,dx\le\int_0^1 x^{2n}\,dx=\dfrac{1}{n+1}$	2p
	Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$, cu **Criteriul cleştelui** , deducem $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.	

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Pascotescu Camelia

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.
-

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=a+ib\Rightarrow \overline{z}=a-ib$ $2(a-ib)+\mathrm{a}+\mathrm{ib}=3+2\mathrm{i}\Rightarrow 3a-\mathrm{ib}=3+2\mathrm{i}$ $\Rightarrow a=1,b=-2\Rightarrow z=1-2i$	1p 2p 2p
2.	Din **Relaţiile lui Viète** avem $x_1+x_2=-\frac{-3}{1}=-3$ şi $x_1x_2=\frac{1}{1}=1$ Deci $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-3)^2-2\cdot 1=7$	2p 3p
3.	Fie $t=2^x>0$. Rezultă $-2t^2+t+1=0$ $t_1=1,t_2=-\frac{1}{2}$. Deoarece $t_1>0,t_2<0$ şi $t>0\Rightarrow t=1$ $\Rightarrow 2^x=1\Rightarrow x=0$	2p 2p 1p
4.	Numărul submulţimilor căutate este C_5^3 $=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5!}{3!\cdot 2}=\frac{4\cdot 5}{2!}=10$	2p 3p
5.	Distanţa de la un punct $A(\mathrm{x}_0,y_0)$ la dreapta $d:ax+by+c=0$ este $d(A,d)=\frac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Deci $d(A,d)=\frac{\lvert 2\cdot 1+3\cdot 3-1\rvert}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{10}{\sqrt{13}}=\frac{10\sqrt{13}}{13}$	2p 3p
6.	Prin ridicare la pătrat obţinem $\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1$ de unde	3p 2p

www.mateinfo.ro

	$\sin 2x = 0$	

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	5p
b)	$x \circ \alpha = \beta \Rightarrow x = \beta\alpha^{-1}$ $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	1p 2p 2p
c)	Numărul de inversiuni al permutării α este $m(\alpha) = 3 \Rightarrow \epsilon(\alpha) = (-1)^3 = -1$, deci α e impară. Dar oricare ar fi $x \in S_4$ avem $\epsilon(x^4) = 1$, deci x^4 este permutare pară. În concluzie, ecuaţia $x^4 = \alpha$ nu are soluţie.	2p 2p 1p
2. a)	$f(-1) = [1 + (-1) + (-1)^3]^{30} = (-1)^{30} = 1$ $f(1) = [1 + 1 + 1^3]^{30} = 3^{30}$ $f(-1) + f(1) = 1 + 3^{30}$	2p 2p 1p
b)	Avem $f(1) = a_0 + a_1 + ... + a_{30}$ Dar $f(1) = 3^{30} \Rightarrow a_0 + a_1 + ... + a_{30} = 3^{30}$ Deci $a_0 + a_1 + ... + a_{30} \vdots 3$	2p 2p 1
c)	$f(X) = (X^2 - 1)q(X) + aX + b$ $\left.\begin{matrix} X = 1 \Rightarrow f(1) = a + b \Rightarrow a + b = 3^{30} \\ X = -1 \Rightarrow f(-1) = -a + b \Rightarrow -a + b = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = \frac{3^{30} - 1}{2}, b = \frac{3^{30} + 1}{2}$ Resul căutat este $aX + b = \frac{3^{30} - 1}{2}X + \frac{3^{30} + 1}{2}$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

www.mateinfo.ro

a)	$f'(x)=\dfrac{(e^x)'x^2-e^x(x^2)'}{x^4}$	2p
	$=\dfrac{e^x x^2-e^x(2x)}{x^4}$	2p
	$=\dfrac{e^x(x^2-2x)}{x^4}=\dfrac{e^x x(x-2)}{x^4}=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$	1p
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2$	2p
	Pe $(-\infty,0)\cup(2;\infty)$ avem $f'(x)>0$,deci f este strict crescătoare.	2p
	Pe $(0;2)$ avem $f'(x)<0$,deci f este strict descrescătoare.	1p
c)	$\left.\begin{array}{l}\sqrt{3},\sqrt{2}\in(0;2)\\ \sqrt{2}<\sqrt{3}\\ f \text{ descrescãtoare pe } (0;2)\end{array}\right\}\Rightarrow f(\sqrt{3})<f(\sqrt{2})$	3p 2p
	$\dfrac{e^{\sqrt{3}}}{3}<\dfrac{e^{\sqrt{2}}}{2}\Rightarrow 2e^{\sqrt{3}}<3e^{\sqrt{2}}$	
2. a)	$2I_1+3I_2=\int\dfrac{2\sin x+3\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$	2p
	$2I_1+3I_2=\int dx=x+C$ (1)	3p
b)	$2I_2-3I_1=\int\dfrac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx=\int\dfrac{(2\sin x+3\cos x)'}{2\sin x+3\cos x}dx$	3p
	$2I_2-3I_1=\ln\lvert 2\sin x+3\cos x\rvert+C$ (2)	2p
c)	Rezolvând sistemul format din (1) şi (2) rezultă	
	$I_1=\dfrac{1}{13}(2x-3\ln\lvert 2\sin x+3\cos x\rvert)+C$	3p 2p
	$I_2=\dfrac{1}{13}(3x+2\ln\lvert 2\sin x+3\cos x\rvert)+C$	

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Pof: Pascotescu Camelia

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$f(3)=(-1)^3+(-2)^4$ $=-1+16=15$	3p 2p
2.	Cu **Formula radicalilor compuşi** $\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1=$ $=2\sqrt{3}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$	3p 2p
3.	Funcţia fiind injectivă şi domeniul şi codomeniul său având acelaşi număr de elemente, rezultă că funcţia ia fiecare din valorile $-1,-2,-3$ exact o dată. Deci $f(1)+f(2)+f(3)=-1+(-2)+(-3)=-6$	 3p 2p
4.	Axa de simetrie a graficului este $x=-\frac{b}{2a}$ de unde obţinem $\frac{m+2}{6}=1$ $m=4$	2p 2p 1
5.	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_A}=\vec{i}-(2\vec{i}+3\vec{j})=-\vec{i}-3\vec{j}$ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{r_C}-\overrightarrow{r_A}=-\vec{i}+4\vec{j}-(2\vec{i}+3\vec{j})=-3\vec{i}+\vec{j}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)(-3)+(-3)\cdot 1=0$, deci vectorii $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ sunt perpendiculari.	2p 3p
6.	Dacă M este mijlocul segmentului AC , atunci $M\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)\Rightarrow M(0;-1)$.	2p

www.mateinfo.ro

	Mediana din B este dreapta d ce trece prin B şi M , deci $d: \frac{x-x_B}{x_B-x_M}=\frac{y-y_B}{y_B-y_M}$ $d: x+y+1=0$	2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 7 & -1 & b\end{pmatrix}$ Avem minorul de ordin doi $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-4=-5\neq 0$,deci rang $A\geq 2$. Pentru ca rang $A=2$ trebuie ca $\det A=-5b+20=0\Leftrightarrow b=4$	1p 2p 2p
b)	$\det A=0, \Delta_p\neq 0, \Delta_c\neq 0$ $\left.\begin{array}{l}\Delta_p=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-4=-5\neq 0\\ \Delta_C=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 7 & -1 & a\end{vmatrix}=-5a+20\end{array}\right\}\Rightarrow b=4$ şi $a\in R-\{4\}$	1p 2p 2p
c)	Pentru $b=4\overset{a)}{\Rightarrow}\det A=0$ $\left.\begin{array}{l}\Delta_p=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-4=-5\neq 0\\ \Delta_C=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 7 & -1 & b\end{vmatrix}=0\end{array}\right\}\Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat pentru a $a=4, b=4$ Solutia sistemului: $x=\frac{3-3\alpha}{5}, y=\frac{1-\alpha}{5}, z=\alpha,$ unde $\alpha\in\mathbb{R}$.	2p 3p

www.mateinfo.ro

2. a)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1&0&\ln a\\0&a&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&\ln b\\0&b&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\ln a+\ln b\\0&ab&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}1&0&\ln(ab)\\0&ab&0\\0&0&1\end{pmatrix}=A(ab)$	3p 2p
b)	Prin inducţie, demonstrează că $A(a_1)\cdot A(a_2)\cdot\ldots\cdot A(a_n)=A(a_1a_2\ldots a_n)$ folosind $a)$ Luând $n=2011$ şi $a_1=a_2=\ldots=a_{2011}=a\Rightarrow (A(a))^{2011}=A(a^{2011})$	3p 2p
c)	Considerăm funcţia $f:(G,\cdot)\to((0;\infty),\cdot)$, $f(A(a))=a$. $f(A(a))=f(A(b))\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&\ln a\\0&a&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\ln b\\0&b&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow a=b$, deci f e injectivă. Pentru orice $a\in(0;\infty)$ există $A(a)\in G$ cu $f(A(a))=a$, deci f e surjectivă. $f(\mathrm{A(a)}\cdot A(b))\overset{a)}{=}f(A(a\cdot b))=a\cdot b$, deci f este morfism. Fiind injectivă şi surjectivă, funcţia este bijectivă. Fiind şi morfism, rezultă că e izomorfism, deci grupurile $(G,\cdot)$ şi $(\mathbb{R},\cdot)$ sunt izomorfe.	1p 1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(\mathrm{x})=\frac{(\ln^2 x)'x-\ln^2 x}{x^2}$, $f'(\mathrm{x})=\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$	2p 3p
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x_1=1,\mathrm{x}_2=e^2$; $f(1)=0, f(e^2)=\frac{4}{e^2}$. $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\ln^2 x}{x}=\frac{1}{0+}[\ln(+0)]^2=\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty},\mathrm{l'H}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty},\mathrm{l'H}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$ f fiind continuă şi deoarece pentru $x>0\Rightarrow f(x)\geq 0$, rezultă $\mathrm{Im}\ f=[0;\infty)$	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

c)	$x=e^2$ punct de maxim local pe $(1;\infty)$. Rezultă $f(x)\le f(e^2),\forall x>1$. $\frac{\ln^2 x}{x}\le\frac{4}{e^2}\Rightarrow e^2\ln^2 x\le 4x\Rightarrow (e\ln x)^2\le(2\sqrt{x})^2 \overset{e\ln x,2\sqrt{x}\ge 0}{\Rightarrow} e\ln x\le 2\sqrt{x},\forall x\in(1;\infty)$	2p 3p
2. a)	$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$ $=(\operatorname{tg}x-x)\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$	3p 2p
b)	$I_{n+1}+I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg}^{2n+2}x+\operatorname{tg}^{2n}x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg}^{2n}x(\operatorname{tg}^2x+1)\right)dx=$ $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg}^{2n}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx \overset{u(x)=\operatorname{tg}x}{=}\int_0^1 u^{2n}\,du=\frac{u^{2n+1}}{2n+1}\Big\|_0^1=\frac{1}{2n+1}$	2p 3p
c)	Studiem monotonia şirului: $I_{n+1}-I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\operatorname{tg}^{2n}x\cdot(\operatorname{tg}^2x-1)]\,dx\le 0$ $\operatorname{tg}0\le\operatorname{tg}x\le\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\Rightarrow 0\le\operatorname{tg}x\le 1\Rightarrow\operatorname{tg}^{2n}x\ge 0,(\operatorname{tg}^2x-1)\le 0\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n}x(\operatorname{tg}^2-1)\le 0$, Deci şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este descrescător. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n}x\,dx\ge 0\Rightarrow 0\le I_n\le I_1$, deci şirul e şi mărginit. Conform **Teoremei lui Weierstrass,** şirul e convergent. Fie $l=\lim\limits_{n\to\infty}I_n$. Trecând la limită în relația de la $b)$ rezultă $l+l=0\Rightarrow l=0$, deci şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent la 0 .	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 1

Prof: Pisică Lăcrămioara

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$1<\log_{\frac{5}{3}} 2<2$	2p
	$2<\sqrt[3]{9}<3$	1p
	$A=\{2\}\Rightarrow \text{card}A=1$	2p
2.	$\min \text{im}=-\frac{\Delta}{4a}<0$	1p
	$m<\frac{9}{4}$	2p
	$m\in\mathbb{N}^*\Rightarrow m\in\{1,2\}$	2p
3.	$3\cdot 2^x+4>0\,(A)\Rightarrow x\in\mathbb{R}$	1p
	$3\cdot 2^x+4=2^{x+2}$	2p
	$2^x=4\Rightarrow x=2$	2p
4.	$T_{k+1}=C_9^k\left(\frac{1}{x}\right)^{9-k}\left(\sqrt{x}\right)^k$	2p
	$x^{\frac{3k}{2}-9}=x^0$	1p
	$k=6\Rightarrow T_7=C_9^6$	2p
5.	M este mijlocul lui AN : $\left(x_M=\frac{x_A+x_N}{2}, y_M=\frac{y_A+y_N}{2}\right)$	2p
	N este mijlocul lui MB : $\left(x_N=\frac{x_M+x_B}{2}, y_N=\frac{y_M+y_B}{2}\right)$	
	$A(1,-2)$, $B(-5,7)$	3p
6.	$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$	2p
	$\cos B=-\frac{1}{20}<0\Rightarrow m(\sphericalangle B)>90°$	3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

www.mateinfo.ro

1. a)	$\det(A)=(m+1)^2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2m & 1 & m^2\\ m^2 & 2m & 1\end{vmatrix}$	2p
	$\det(A)=(m+1)^2\left(m^2-m+1\right)^2$	1p
	$\det(A)\neq 0\Rightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	2p
b)	Fie (x_0,y_0,z_0) soluția sistemului	3p
	Adunând cele 3 ecuații obținem $(m+1)^2(x_0+y_0+z_0)=0$	
	știind că $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ obținem $x_0+y_0+z_0=0$	2p
c)	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rang}A=2$	2p
	$\text{rang}\overline{A}=2\Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat	1p
	soluția sitemului $(\alpha-3,\alpha+1,\alpha),\alpha\in\mathbb{R}$	2p
2. a)	$x\circ(-1)=x\Rightarrow x(-a+b-1)+c-b=0\Rightarrow\begin{cases}a=b-1\\ c=b\end{cases}$	2p
	$\frac{1}{2}\circ\left(-\frac{11}{8}\right)=-1\Rightarrow 11a+14b-16c=16$	1p
	se obțin valorile $a=2$, $b=3$, $c=3$	2p
b)	$x\circ y=2\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}\Rightarrow x\circ x\circ x=4\left(x+\frac{3}{2}\right)^3-\frac{3}{2}$	2p
	notând $t=x+\frac{3}{2}$ ecuația devine $4t^3=t$ cu soluțiile $t\in\left\{0,\pm\frac{1}{2}\right\}$	2p
	știind că $x\in G\Rightarrow$ soluția ecuației este $x=-1$	1p
c)	f morfism $\Rightarrow f(x\circ y)=f(x)+f(y)$	1p
	$\ln(2mxy+3mx+3my+3m+n)=\ln(mx+n)+\ln(my+n)\Rightarrow\begin{cases}m^2=2m\\ 3m=mn\\ 3m+n=n^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\ n=3\end{cases}$	2p
	$f:G\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(2x+3)$ funcție bijectivă	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)=\begin{cases}2x-3+\ln x & ,x\in\left[\frac{3}{2},\infty\right)\\ -2x+3+\ln x & ,x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\end{cases}$	1p

www.mateinfo.ro

	f continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$	1p
	$\lim_{s}\left(\frac{3}{2}\right)=\lim_{d}\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)\Rightarrow$ f continuă în $x=\frac{3}{2}$	1p
	$f_s'\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{4}{3}$, $f_d'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{8}{3}\Rightarrow$ f nu este derivabilă în $x=\frac{3}{2}$	2p
b)	$f'(x)=\begin{cases}2+\frac{1}{x} & ,x\in\left(\frac{3}{2},\infty\right)\\ -2+\frac{1}{x} & ,x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\end{cases}$	1p
	$f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$	1p
	f crescătoare pe fiecare din intervalele $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$ și descrescătoare pe $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]\Rightarrow$	1p
	$x=\frac{1}{2}$ punct de maxim local și $x=\frac{3}{2}$ punct de minim local	2p
c)	prima bisectoare $y=x\Rightarrow$ panta este $m=1$	1p
	$\Rightarrow f'(x_0)=1\ \Rightarrow x=\frac{1}{3}$	1p
	punctul de tangență va fi $T\left(\frac{1}{3},\frac{7}{3}-\ln 3\right)$	1p
	ecuația tangentei $x-y+2-\ln 3=0$	2p
2. a)	$f\left(-\sqrt[4]{x}\right)=\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}-3$	1p
	$\int_1^{16} f\left(-\sqrt[4]{x}\right)dx=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{8}{5}\sqrt[4]{x^5}-3x\right)\Big\|_1^{16}$	2p
	calculând obținem $\frac{233}{5}$	2p
b)	$V=\pi\int_0^3 g^2(x)dx\ \Rightarrow\ V=\pi\int_0^3\sqrt{-x^2+2x+3}dx$	1p
	$I=\int_0^3\sqrt{-x^2+2x+3}dx=\int_0^3\sqrt{4-(x-1)^2}dx$	1p
	realizând schimbarea de variabilă $t=x-1\Rightarrow\ I=\int_{-1}^{2}\sqrt{4-t^2}dt$	
	aplicând metoda integrării prin părți obținem $I=\left(\frac{t}{2}\sqrt{4-t^2}+2\arcsin\frac{t}{2}\right)\Big\|_{-1}^{2}$	2p

www.mateinfo.ro

	$V=\pi\sqrt{3}+\frac{4\pi^2}{3}$	1p
c)	$a_n=\int_n^{n+1}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)dx$	1p
	$a_n=1-\frac{4}{n(n+1)}$	2p
	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{n^2}=e^{-4}$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 2

Prof: Pisică Lăcrămioara

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_3=a_1q^2$, $a_4=a_1q^3$	2p
	$a_1=\frac{27}{4}$, $q=-\frac{2}{3}$	1p
	$S_4=a_1\cdot\frac{q^4-1}{q-1}\Rightarrow S_4=\frac{13}{4}$	2p
2.	$f(x)=y\Rightarrow x=\log_3\left(2^{y+1}-1\right)$	3p
	$f^{-1}:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\log_3\left(2^{x+1}-1\right)$	2p
3.	Condiții de existență : $\begin{cases}x+7\geq 0\\ x+2\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in[-2,\infty)$	2p
	ecuația devine : $2\sqrt{x+7}=3\sqrt{x+2}$	1p
	$x=2\in[-2,\infty)$	2p
4.	$\{a,b,c\}$ cu $a\in\{1,3,5,7,9\}$, $b,c\in\{0,2,4,6,8\}$	2p
	$C_5^1\cdot C_5^2=50$	3p
5.	$C\in Oy\Rightarrow C(0,a)\Rightarrow\Delta=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&a&1\end{vmatrix}=a-3$	2p
	$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\lvert\Delta\rvert\Rightarrow\lvert\Delta\rvert=2$	1p

www.mateinfo.ro

	se obțin punctele $C_1(0,5)$ și $C_2(0,1)$	2p
6.	$tg2b=\frac{2tgb}{1-tg^2b}\Rightarrow tg2b=\frac{3}{4}$	2p
	$tg(a+2b)=\frac{tga+tg2b}{1-tga\cdot tg2b}\Rightarrow tg(a+2b)=1\Rightarrow a+2b=45°$	3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$X^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & d^2+bc\end{pmatrix}$	2p
	Verificarea identității	3p
b)	$AX=XA\Rightarrow\begin{cases}b=2c\\ c=a-d\end{cases}$	1p
	$X=\begin{pmatrix}a & 2(a-d)\\ a-d & d\end{pmatrix}\Rightarrow det(X)=-2a^2+5ad-2d^2\Rightarrow det(X)=(2a-d)(2d-a)$	2p
	$X=\begin{pmatrix}a & -2a\\ -a & 2a\end{pmatrix}$ și $X=\begin{pmatrix}2d & 2d\\ d & d\end{pmatrix}$	2p
c)	$det(X^4)=det(A)\Rightarrow det(X)=0$	1p
	conform pct a) $X^2=(a+d)X\Rightarrow X^4=(a+d)^3X$	1p
	$X^4=A\Rightarrow\begin{cases}a=b\\ c=d\\ a=2c\end{cases}\Rightarrow c^4=\frac{1}{9}\Rightarrow c=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	2p
	soluțiile ecuației vor fi : $X=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$ și $X=\begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3}\\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$	2p
2. a)	$f\vdots X-1\Rightarrow f(1)=0$	3p
	verificarea condiției	2p
b)	relațiile lui Viete $\Rightarrow s_1=i$, $s_2=1+i$, $s_3=6-2i$, $s_4=4-4i$	1p
	notând $T_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n+x_4^n$ și adunând relațiile $f(x_i)=0\Rightarrow$	1p
	$T_4+i\cdot T_3+(1+i)\cdot T_2-2(3-i)\cdot T_1+4(4-4i)=0$	
	$T_1=s_1=-i$, $T_2=s_1^2-2s_2=-3-2i$	1p
	adunând relațiile $\frac{f(x_i)}{x_i}=0\Rightarrow$	1p
	$T_3+i\cdot T_2+(1+i)\cdot T_1-2(3-i)\cdot 4+4(4-4i)\cdot\frac{s_3}{s_4}=0\Rightarrow T_3=15-2i$	

www.mateinfo.ro

	$T_4=-19\Rightarrow \text{Im}(T_4)=0$	1p
c)	$f(1-i)=0\Rightarrow m=2-i$	2p
	$f=(x-1)(x-1+i)(x^2+2x+4)$	2p
	$x_1=1$, $x_2=1-i$, $x_{3,4}=-1\pm i\sqrt{3}$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+1$	2p
	$f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ f strict crescătoare pe $\mathbb{R}\Rightarrow$ f injectivă	1p
	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\dfrac{1}{2}$, f continuă $\Rightarrow \text{Im}f=\left(-\dfrac{1}{2},\infty\right)\Rightarrow$ f nu este surjectivă	2p
b)	$Gf\cap Ox=\{A(-1,0)\}$	1p
	$m=f'(-1)=\dfrac{1}{2}$	1p
	ecuația tangentei $y-y_A=m(x-x_A)$	1p
	înlocuind obținem $x-2y+1=0$	2p
c)	asimptotă orizontală $y=-\dfrac{1}{2}$ spre $-\infty$	2p
	asimptotă oblică $y=2x+\dfrac{1}{2}$ spre ∞	2p
	domeniul de definiție este $\mathbb{R}\Rightarrow$ nu există asimptote verticale	1p
2. a)	$\int_0^1 f(x+2)\cdot e^x dx=\int_0^1 (x^2-1)\cdot e^x dx$	1p
	$\int_0^1 (x^2-1)\cdot e^x dx=e^x\left(x^2-2x+1\right)\Big\vert_0^1$	2p
	calculând $\int_0^1 (x^2-1)\cdot e^x dx=-1$	2p
b)	$\Gamma_g=\int_0^2 \vert g(x)\vert dx=\int_0^2 \left\vert (x-1)e^{x^2-2x+1}\right\vert dx=\int_0^2 \vert (x-1)\vert e^{x^2-2x+1}dx$	2p
	$\Gamma_g=\int_0^1 (-x+1)e^{x^2-2x+1}dx+\int_1^2 (x-1)e^{x^2-2x+1}dx$	1p
	realizăm schimbarea de variabilă $t=x^2-2x+1$	1p
	calculând $\Gamma_g=e-1$	2p

www.mateinfo.ro

c)	$\int_1^3 \left(x^2-4x+3\right)^n dx = \int_1^3 \left((x-2)^2-1\right)^n dx = \int_{-1}^1 \left(t^2-1\right)^n dt$	2p
	$f(x)=\left(x^2-1\right)^n$ este funcție pară	1p
	$\int_{-1}^1 \left(t^2-1\right)^n dt = 2\cdot\int_0^1 \left(t^2-1\right)^n dt$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 3

Prof: Pisică Lăcrămioara

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$4<5<8 \Rightarrow -3<\log_{0,5}5<-2 \Rightarrow \left[\log_{0,5}5\right]=-3$	2p
	$\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}=5$	1p
	$z_1=4-3i$, $z_2=-4-3i$	2p
2.	$S=-\frac{b}{a}=-m$, $P=\frac{c}{a}=m+2$	2p
	$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=-1 \Rightarrow \frac{S^2-2P}{P}=-1$	1p
	$m^2-m-2=0 \Rightarrow m\in\{-1,2\}$	2p
3.	$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$	1p
	$x+\frac{\pi}{6}=(-1)^k\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$	2p
	$x\in\left\{\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right\}$	2p
4.	$C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$	2p
	$\frac{1}{3}=\frac{1}{n-2}\Rightarrow n=5$	3p
5.	$-\frac{3}{4}=-\frac{6}{8}\Rightarrow d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \text{latura}=\text{dist}(d_1,d_2)$	1p

www.mateinfo.ro

	$dist(d_1,d_2)=dist(A,d_2)=\frac{\lvert ax_A+by_A+1\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $A\in d_1$ alegând $A(1,1)\in d_1 \Rightarrow$ latura $=\frac{3}{2}\Rightarrow$ aria $=\frac{9}{4}$	2p 2p
6.	$A=\frac{3\sin x}{2\sin x+5\cos x}=\frac{3\sin x}{\cos x(2\sin x+5)}$ $A=\frac{3tgx}{2tgx+5}=\frac{2}{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det(A)=2-5a$ $\det(A)=0\Rightarrow a=\frac{2}{5}\notin\mathbb{Z}$ deci $\det(A)\neq 0\Rightarrow X=O_3$ soluție unică	2p 1p 2p
b)	$\det(A)=2$ $A^*=\begin{pmatrix}-9 & 10 & -4\\ 7 & -8 & 4\\ -3 & 4 & -2\end{pmatrix}$ $X=A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot A^*$	1p 2p 2p
c)	$\det(A)=2-5a\neq 0$ $d_x=3(2-5a)$, $d_y=-2(2-5a)$, $d_z=2-5a$ soluția va fi $(3,-2,1)$	1p 2p 2p
2. a)	$B=\{f\in\mathbb{Z}_5[X]\mid f=aX^4+bX^3+cX^2+dX+e \quad , \quad a\in\mathbb{Z}_5\setminus\{\hat{0}\},b,c,d,e\in\mathbb{Z}_5\}$, $cardB=4\cdot 5^4$ $A=\{f\in\mathbb{Z}_5[X]\mid f=X^4+aX^3+bX^2+\hat{4} \quad , \quad a,b\in\mathbb{Z}_5\}$, $cardA=5^2$ $prob=0,01$	2p 2p 1p
b)	$f(\hat{2})=\hat{0}\Rightarrow \hat{3}a+\hat{4}b=\hat{0}$ $f(X+\hat{1})=(X+\hat{2})\cdot c+\hat{3}\Rightarrow f(\hat{4})=\hat{3}\Rightarrow \hat{4}a+b=\hat{3}$ obținem $a=\hat{4}$, $b=\hat{2}$	1p 2p 2p
c)	$f=X^4+\hat{4}$ 5 este număr prim $\Rightarrow x^4=\hat{1}, \forall x\in\mathbb{Z}_5\setminus\{\hat{0}\}$ (teorema lui Fermat) $f(x)=\hat{0}$, $\forall x\in\mathbb{Z}_5\setminus\{\hat{0}\}\Rightarrow f=(x+\hat{1})(x+\hat{2})(x+\hat{3})(x+\hat{4})$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

www.mateinfo.ro

1. a)	$f'(x)=\dfrac{a\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$	2p
	$f'(x)=0\Rightarrow x=\pm 1$	1p
	$a>0\Rightarrow f'(x)>0$ pe $(-\infty,-1)$ respectiv $(1,\infty)$ și $f'(x)<0$ pe $(-1,1)$	2p
	$a<0\Rightarrow f'(x)<0$ pe $(-\infty,-1)$ respectiv $(1,\infty)$ și $f'(x)>0$ pe $(-1,1)$ deci $x=1$ și $x=-1$ sunt puncte de extrem local	
b)	$f(-1)=\dfrac{a+2}{2}$, $f(1)=\dfrac{2-a}{2}$	1p
	$a>0\Rightarrow \max=f(-1)=3$ și $\min=f(1)=-1\ \Rightarrow a=4$	2p
	$a<0\Rightarrow \min=f(-1)=-1$ și $\max=f(1)=3\ \Rightarrow a=-4$	2p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{f'(x)}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-\frac{x\left(x^2+1\right)}{x^2-1}}$	3p
	limita este egală cu 0	2p
2. a)	schimbarea de variabilă $t=x^2$	2p
	$I=\dfrac{e-1}{2}$	2p 1p
b)	$g(x)=f(x)+\dfrac{e}{f(x)}=e^{x^2}+e^{1-x^2}\ \Rightarrow g'(x)=2xe^{1-x^2}\left(e^{2x^2-1}-1\right)$	2p
	$g'(x)=0\Rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1p
	$x\in[0,1]\Rightarrow g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\le g(x)\le g(0)$, $g(0)=g(1)=\max$	1p
	înlocuind și integrând pe intervalul $[0,1]$ obținem relația cerută	1p
c)	$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=e^{t^2}$ continuă $\Rightarrow$ f admite primitive	1p
	Fie F o primitivă a lui f $\Rightarrow$F derivabilă și $F'=f\ \Rightarrow\ \int\limits_0^{x^2}f(t)dt=F\left(x^2\right)-F(0)$	2p
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^{x^2}f(t)dt}{f(x)-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F\left(x^2\right)-F(0)}{f(x)-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xF'\left(x^2\right)}{f'(x)}=1$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 4

www.mateinfo.ro

Prof: Pisică Lăcrămioara

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_n = a_1 + (n-1)r$	2p
	$\begin{cases} r = 3a_1 \\ 2a_1 + 12r = 19 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$	3p
2.	$f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$	
	din $f \circ g = g \circ f$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow ad + b = bc + d$	3p
	un exemplu este $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -3x + 4$	2p
3.	$\log_3 2 < 1 \Rightarrow x^2 - x < x + 3$	2p
	$x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow x \in (-1, 3)$	2p
	$x \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow x \in \{1, 2\}$	1p
4.	$\{12, 16, ..., 96\} \Rightarrow 22$ numere divizibile cu 4	1p
	$\{12, 18, ..., 96\} \Rightarrow 15$ numere divizibile cu 6	1p
	$\{12, 24, ..., 96\} \Rightarrow 8$ numere divizibile cu 4 și cu 6	1p
	Deci vor fi 29 de numere divizibile cu 4 sau cu 6	2p
5.	coordonatele mijlocului segmentului AB : $M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	1p
	panta dreptei AB : $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1$	1p
	panta mediatoarei : $m = -\frac{1}{m_{AB}} = 1$	1p
	ecuația mediatoarei : $y - y_M = m(x - x_M) \Rightarrow x - y = 0$	2p
6.	$\frac{NA}{NC} = \frac{1}{5} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = \frac{5}{6}\left(\overrightarrow{DA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{DC}\right)$	2p
	$\frac{MA}{MB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \overrightarrow{DM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$	2p
	$\Rightarrow \overrightarrow{DN} = \frac{5}{6}\overrightarrow{DM} \Rightarrow$ vectorii sunt coliniari $\Rightarrow$ punctele sunt coliniare	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2p

www.mateinfo.ro

	$B^3 = O_3 \Rightarrow k=3$	3p
b)	$A = 2I_2 + B$ și aplicând Binomul lui Newton obținem $A^n = 2^n I_2 + n \cdot 2^{n-1} B + n(n-1) \cdot 2^{n-3} B^2$ $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} & n(n+2) \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & n \cdot 2^{n+1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$	2p 3p
c)	$\det(A^k) = 8^k$ $\sum_{k=1}^{n} \det(A^k) = \sum_{k=1}^{n} 8^k = 8 \cdot \frac{8^n - 1}{7}$ $7 \cdot \sum_{k=1}^{1005} \det(A^k) = 8^{1006} - 8 \Rightarrow 7 \cdot \sum_{k=1}^{1005} \det(A^k) \le 8^{1006} \le 9^{1006} = 3^{2012}$	1p 2p 2p
2. a)	$A^2 = 2A$ $X_a \cdot X_b = X_{a+b+2ab}$ $a > -\frac{1}{2}, b > -\frac{1}{2} \Rightarrow a+b+2ab > -\frac{1}{2}$ din cele 2 relații $\Rightarrow X_a \cdot X_b \in G$	1p 2p 1p 1p
b)	f morfism $\Leftrightarrow f(X_a \cdot X_b) = f(X_a) + f(X_b)$, $\forall X_a, X_b \in G$ f injectivă $\Leftrightarrow$ fie $X_a, X_b \in G$ $f(X_a) = f(X_b) \Rightarrow a = b$ f surjectivă $\Leftrightarrow f(X_a) = y \Rightarrow a = \frac{e^y - 1}{2} > -\frac{1}{2}$ deci f este izomorfism de grupuri	2p 1p 1p 1p
c)	$f\left(X_{\frac{1}{2}} \cdot X_{\frac{3}{2}} \cdot X_{\frac{5}{2}} \cdot \ldots \cdot X_{\frac{2n-1}{2}}\right) = f\left(X_{\frac{1}{2}}\right) + f\left(X_{\frac{3}{2}}\right) + f\left(X_{\frac{5}{2}}\right) + \ldots + f\left(X_{\frac{2n-1}{2}}\right)$ $f\left(X_{\frac{2k-1}{2}}\right) = \ln(2k)$ înlocuind obținem $f\left(X_{\frac{1}{2}} \cdot X_{\frac{3}{2}} \cdot X_{\frac{5}{2}} \cdot \ldots \cdot X_{\frac{2n-1}{2}}\right) = \ln(2^n \cdot n!) = f\left(X_{\frac{2^n \cdot n! - 1}{2}}\right)$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ $f'(x) \ge 0 \Rightarrow$ f strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	2p 3p
b)	f strict crescătoare $\Rightarrow$ f injectivă	1p

www.mateinfo.ro

	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, f continuă $\Rightarrow$ $\text{Im}f=\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f surjectivă	1p
	f bijectivă $\Rightarrow$ f inversabilă $\Rightarrow$ $g'(0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$, $f(x_0)=0\Rightarrow x_0=0$	2p
	$g'(0)=1$	1p
c)	egalitatea este verificată pentru $x=0$ și $x=1$	2p
	$x\in(0,1)\Rightarrow\begin{cases}x>x^2\\x^3>x^4\end{cases}\xrightarrow{\text{f cresc}}\begin{cases}f(x)>f(x^2)\\f(x^3)>f(x^4)\end{cases}\Rightarrow f(x)+f(x^3)>f(x^2)+f(x^4)$	1p
	$\begin{matrix}x>1\\x<0\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}x<x^2\\x^3<x^4\end{cases}\xrightarrow{\text{f cresc}}\begin{cases}f(x)<f(x^2)\\f(x^3)<f(x^4)\end{cases}\Rightarrow f(x)+f(x^3)<f(x^2)+f(x^4)$	1p
	deci soluțiile găsite sunt unice	1p
2. a)	schimbarea de variabilă $t=x^4+1$ $\Rightarrow$ $I_3=\dfrac{\ln 2}{4}$	2p
	schimbarea de variabilă $t=x^2$ $\Rightarrow$ $I_1=\dfrac{\pi}{8}$	3p
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\dfrac{x^n(x-1)}{x^4+1}dx\le 0\Rightarrow(I_n)_{n\ge 1}$ descrescător	1p
	$0\le I_n\le I_1\Rightarrow(I_n)_{n\ge 1}$ mărginit	1p
	deci șirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este convergent	1p
	$\dfrac{x^n}{x^4+1}\le x^n$ pentru $x\in[0,1]\Rightarrow I_n\le\dfrac{1}{n+1}$	1p
	$0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$	1p
c)	$I_{n+4}+I_n=\dfrac{1}{n+1}$	2p
	$\dfrac{1}{2(n-3)}\le I_n\le\dfrac{1}{2(n+1)}\Rightarrow\dfrac{n^k}{2(n-3)}\le n^k\cdot I_n\le\dfrac{n^k}{2(n+1)}$	2p
	$\lim\limits_{n\to\infty} n^k\cdot I_n=\begin{cases}\infty & ,k>1\\ \dfrac{1}{2} & ,k=1\\ 0 & ,k<1\end{cases}$	1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 1

Prof: RICU ILEANA

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.

$m=5^{1+x}+5^{1-x}=5\cdot 5^x+5\cdot 5^{-x}=5\left(5^x+5^{-x}\right)=5\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)$ — 1p

$p=25^x+25^{-x}=5^{2x}+5^{-2x}=\left(5^x\right)^2+\left(5^{-x}\right)^2=\left(5^x\right)^2+\left(\frac{1}{5^x}\right)^2=\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)^2-2\cdot 5^x\cdot\frac{1}{5^x}=\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)^2-2$ — 1p

Dar $m+p=2n\Rightarrow\begin{cases}5\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)+\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)^2-2=a\\ Not.\ 5^x+\frac{1}{5^x}=y\end{cases}\Rightarrow y^2+5y-2=a\Leftrightarrow y^2+5y-2-a=0$ — 1p

Ec.are rădăcini reale $\Leftrightarrow\Delta\geq 0(1)$;Cum y>0(2)

$\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow}\begin{cases}\Delta\geq 0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+33\geq 0\\ -a-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\geq-\frac{33}{4}\\ a<-2\end{cases}\Rightarrow a\in\left[-\frac{33}{4};-2\right)$ — 2p

2.

$f(x)>0\Leftrightarrow\frac{mx^2+2(m+1)x+m-2}{x^2+1}>0\Leftrightarrow mx^2+2(m+1)x+m-2>0,\forall x\in\mathbb{R}$ — 1p

$\Rightarrow\begin{cases}m>0\\ \Delta<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 4m+1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(0;+\infty)\\ m\in\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)\end{cases}\Rightarrow m\in(0;+\infty)\cap\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)=\varnothing$ — 2p, 2p

3.

$M=\{x/x\in\mathbb{Z},|x|\leq 7\}=\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$ — 1p

Pt.x≥0$\Rightarrow x^2-5x+4=0\Rightarrow x_1=4;x_2=1$ — 1p

Pt.x<0$\Rightarrow x^2+5x+4=0\Rightarrow x_1=-4;x_2=-1$ — 1p

Evenimentul $A=\{-4,-1,1,4\}$ — 1p

$\Rightarrow$Evenimentul contrar lui A este: $\overline{A}=\{-7,-6,-5,-3,-2,0,2,3,5,6,7\}$ — 1p

4.

$\left(17x^5-18y\right)^{2012}=C_{2012}^0\left(17x^5\right)^{2012}\left(-18y\right)^0+C_{2012}^1\left(17x^5\right)^{2011}\left(-18y\right)^1+.....$ — 2p

$.....+C_{2012}^{2012}\left(17x^5\right)^0\left(-18y\right)^{2012}$

Suma coeficienţilor este: — 3p

$C_{2012}^0 17^{2012}(-18)^0+C_{2012}^1 17^{2011}(-18)^1+C_{2012}^2 17^{2010}(-18)^2+.....+C_{2012}^{2012}17^0(-18)^{2012}=$

$\underset{cf.\ form.binom.Newton}{=}(17+(-18))^{2012}=(-1)^{2012}=1$

5.

$\vec{a}=3\vec{m}-2\vec{n}+\vec{p}=3\left(2\vec{i}-3\vec{j}\right)-2\left(-\vec{i}+2\vec{j}\right)+\left(4\vec{j}\right)=8\vec{i}-9\vec{j}$ — 2p

$\vec{b}=-2\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}=-2\left(2\vec{i}-3\vec{j}\right)+\left(-\vec{i}+2\vec{j}\right)-4\vec{j}=-5\vec{i}+4\vec{j}$ — 2p

$\vec{a}+\vec{b}=\left(8\vec{i}-9\vec{j}\right)+\left(-5\vec{i}+4\vec{j}\right)=3\vec{i}-5\vec{j}\Rightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$ — 1p

www.mateinfo.ro

6.	Folosim relaţia $\arcsin x = arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(0;1)$ $\arcsin\frac{4}{5} = arctg\frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = arctg\frac{4}{3} \Rightarrow tg\left(\arcsin\frac{4}{5}+arctg\frac{7}{24}\right)=$ $=tg\left(arctg\frac{4}{3}+arctg\frac{7}{24}\right)=tg(a+b)$ unde am notăm $\begin{cases}arctg\frac{4}{3}=a\\arctg\frac{7}{24}=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}tga=\frac{4}{3}\\tgb=\frac{7}{24}\end{cases}$ $\Rightarrow tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tga\cdot tgb}=...=\frac{117}{44}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. **a)**	Elementele inversabile din $\mathbb{Z}_{12}$ sunt: $\hat{1},\hat{5},\hat{7},\hat{11}$ $\Rightarrow \hat{1}+\hat{5}+\hat{7}+\hat{11}=\hat{0}$	3p 2p
b)	$\det A=\begin{vmatrix}\hat{1}&\hat{0}&\hat{5}\\\hat{x}&\hat{1}&\hat{2}\\\hat{4}&\hat{3}&\hat{1}\end{vmatrix}=\hat{3}x+\hat{11}$ $\Rightarrow \det A=\hat{3}x+\hat{11}\neq\hat{0}\Rightarrow\hat{3}x\neq\hat{1}\Rightarrow x\in\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6},\hat{7},\hat{8},\hat{9},\hat{10},\hat{11},\}=\mathbb{Z}_{12}$ $\Rightarrow$ A este inversabilă $\forall x\in\mathbb{Z}_{12}$.	2p 2p
c)	Pentru $x=\hat{0}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\hat{5}&\hat{9}&\hat{5}\\\hat{4}&\hat{7}&\hat{2}\\\hat{8}&\hat{3}&\hat{11}\end{pmatrix}\in M(\mathbb{Z}_{12})$ Ecuaţia YA=B $\Leftrightarrow$ Y=BA^{-1} $=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{0}&\hat{2}\\\hat{2}&\hat{1}&\hat{0}\\\hat{0}&\hat{2}&\hat{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{5}&\hat{9}&\hat{5}\\\hat{4}&\hat{7}&\hat{2}\\\hat{8}&\hat{3}&\hat{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{5}&\hat{3}&\hat{3}\\\hat{2}&\hat{1}&\hat{0}\\\hat{4}&\hat{5}&\hat{3}\end{pmatrix}$	3p 2p
2. **a)**	$\left.\begin{aligned}f(1)&=a_0+a_1+a_2+a_3+....+a_{2n-1}+a_{2n}=3^n\\f(-1)&=a_0-a_1+a_2-a_3+....-a_{2n-1}+a_{2n}=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow a_1+a_3+....+a_{2n-1}=\frac{f(1)-f(-1)}{2}=$ $=\frac{3^n-1}{2}$	1p 3p 1p
b)	Cf.teor.împărţirii cu rest a polinoamelor $\Rightarrow$ $f=(X+2)^2\cdot q+ax+b, a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow f(-2)=-2a+b=3^n\ (1)$ $f'=2(X+2)q+(X+2)^2q'+a\Rightarrow f'(-2)=a\ (2)$	3p

www.mateinfo.ro

	Dar $f'=n\left(X^2+X+1\right)^{n-1}(2X+1)\Rightarrow f'(-2)=n\cdot 3^{n-1}\cdot(-3)=-n\cdot 3^n(3)$ $\overset{din(2)si(3)}{\Rightarrow}\ a=-n\cdot 3^n$ de unde $b=3^n(1-2n)$	2p
c)	f(x)=f(-x) $\Leftrightarrow\left(x^2+x+1\right)^n=\left(x^2-x+1\right)^n$;cum $x^2-x+1\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ $\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^n=1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi\Rightarrow\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$; $k\in\{0,1,....,n-1\}$ Pentru k=0 $\Rightarrow$ $x_0=0$ Pentru $k=\overline{1,n-1}$ avem $\frac{x^2+1}{x}=\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{-1+\cos\alpha+i\sin\alpha}\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2i^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=-ictg\frac{\alpha}{2}$ Deci $x^2+ixctg\frac{\alpha}{2}+1=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-i\left(ctg\frac{k\pi}{n}\pm\sqrt{4+ctg^2\frac{k\pi}{n}}\right)}{2};k=\overline{1,n-1}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{x+2}{x+1}$ $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ Semnul lui $f'(x)$: x: $-\infty$ … -1 … $+\infty$ $x+2$: + $x+1$: + $f'(x)$: + $f(x)$: $-\infty$ ↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗ $+\infty$ $\Rightarrow$ f este strict crescătoare pe domeniul său de definiţie.	1p 1p 2p 1p
b)	Se arată că pe intervalul (-1;0)avem $f(x)<0\Rightarrow$ $A(\alpha)=-\int_\alpha^0 f(x)dx=-\int_\alpha^0\left(x+\ln(1+x)\right)dx=-\int_\alpha^0 xdx-\int_\alpha^0\ln(1+x)dx=$ $=-\frac{x^2}{2}\Big\vert_\alpha^0-\int_\alpha^0 x'\cdot\ln(1+x)dx=0+\frac{\alpha^2}{2}-\left[x\cdot\ln(1+x)\Big\vert_\alpha^0-\int_\alpha^0\frac{x}{1+x}dx\right]=$ $=\frac{\alpha^2}{2}-\left[0-\alpha\cdot\ln(1+\alpha)-\int_\alpha^0\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx\right]=\frac{\alpha^2}{2}+\alpha\cdot\ln(1+\alpha)+x\Big\vert_\alpha^0-\ln(1+x)\Big\vert_\alpha^0=$ $=\frac{\alpha^2}{2}+\alpha\cdot\ln(1+\alpha)-\alpha+\ln(1+\alpha)=\frac{\alpha^2}{2}-\alpha+(\alpha+1)\ln(\alpha+1)$,	1p 3p 1p

www.mateinfo.ro

c) $\lim\limits_{\alpha\to-1}A(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to-1}\left(\frac{\alpha^2}{2}-\alpha+(\alpha+1)\ln(\alpha+1)\right)=\lim\limits_{\alpha\to-1}\left(\frac{\alpha^2}{2}-\alpha\right)+\underbrace{\lim\limits_{\alpha\to-1}(\alpha+1)\ln(\alpha+1)}_{not.L}=$ — 2p

$=\frac{3}{2}+L=\frac{3}{2}+0=\frac{3}{2}$

Unde $L\overset{0\cdot\infty}{=}\lim\limits_{\alpha\to-1}(\alpha+1)\ln(\alpha+1)=\lim\limits_{\alpha\to-1}\frac{\ln(\alpha+1)}{\frac{1}{\alpha+1}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{\alpha\to-1}\frac{\frac{1}{\alpha+1}}{-\frac{1}{(\alpha+1)^2}}=\lim\limits_{\alpha\to-1}-(1+\alpha)=0$ — 3p

2. a) $I_0=\int_1^e xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^e=\frac{e^2-1}{2}$ — 2p

$I_1=\int_1^e x\ln xdx\overset{\text{prin parti}}{=}\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln xdx=\left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\right)\Big|_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=$ — 3p

$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2-1}{2}=\frac{e^2+1}{4}$

b) Folosim metoda integrării prin părţi $\Rightarrow$

$I_n=\int_1^e x(\ln x)^n dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'(\ln x)^n dx=\left(\frac{x^2}{2}(\ln x)^n\right)\Big|_1^e-n\int_1^e(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx=$

$=\frac{e^2}{2}-\frac{n}{2}\int_1^e x(\ln x)^{n-1}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{n}{2}\cdot I_{n-1}$ — 3p

Am găsit $I_n=\frac{e^2}{2}-\frac{n}{2}\cdot I_{n-1}\Big|\cdot 2\Rightarrow 2I_n+nI_{n-1}=e^2$ — 2p

c) Şirul $(I_n)_{n\geq 0}$ este descrescător $\Rightarrow$

$\begin{cases}I_{n+1}-I_n\leq 0\\ I_{n+1}-I_n\overset{cf.b)}{=}\frac{e^2}{2}-\frac{n+1}{2}\cdot I_n-I_n=\frac{e^2}{2}-I_n\left(\frac{n+1}{2}+1\right)=\frac{e^2}{2}-I_n\frac{n+3}{2}\end{cases}$ — 2p

$\Rightarrow\frac{e^2}{2}-I_n\frac{n+3}{2}\leq 0\Rightarrow I_n\frac{n+3}{2}\geq\frac{e^2}{2}\Rightarrow I_n\geq\frac{e^2}{n+3}(1)$

Analog avem:

$\begin{cases}I_{n-1}-I_n\geq 0\\ I_{n-1}-I_n\overset{cf.b)}{=}\frac{e^2}{n}-\frac{2}{n}\cdot I_n-I_n=\frac{e^2}{n}-I_n\left(\frac{2}{n}+1\right)=\frac{e^2}{n}-I_n\frac{n+2}{n}\end{cases}$

$\Rightarrow\frac{e^2}{n}-I_n\frac{n+2}{n}\geq 0\Rightarrow I_n\frac{n+2}{n}\leq\frac{e^2}{n}\Rightarrow I_n\leq\frac{e^2}{n+2}(2)$ — 2p

$\Rightarrow\frac{e^2}{n+3}\leq I_n\leq\frac{e^2}{n+2}$ — 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 2

Prof: RICU ILEANA

www.mateinfo.ro

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.

$C_{x-3}^0 = 1$ — 1p

$C_{x-1}^2 = \frac{(x-1)!}{(x-3)!\,2!} = \frac{(x-3)!\,(x-2)(x-1)}{(x-3)!\,2} = \frac{(x-2)(x-1)}{2}$ — 1p

$C_x^{x-2} = \frac{x!}{(x-x+2)!\,(x-2)!} = \frac{(x-2)!(x-1)x}{2(x-2)!} = \frac{(x-1)x}{2}$ — 1p

Numerele $2C_{x-3}^0; C_{x-1}^2; C_x^{x-2}$ sunt în progresie aritmetică $\Rightarrow 2C_{x-3}^0 + C_x^{x-2} = 2C_{x-1}^2$ — 1p

$\Rightarrow 2 + \frac{x(x-1)}{2} = 2\cdot\frac{(x-2)(x-1)}{2} \Leftrightarrow -x^2+5x=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \left(nu\ convine\right) \\ x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow S=\{5\}$ — 1p

2.

$x_1 + x_2 = -2(m-1)$ — 1p

$x_1 x_2 = 8(m^2-1)$ — 1p

Calculam $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m-1)^2 - 16(m^2-1) = 4(-3m^2-2m+5)$ — 2p

Fiind o funcţie de gradul II în *m*, aceasta ia valoarea maximă egală cu $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{16}{3}$ obţinută pentru $m = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$ — 1p

3.

$M = \{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$ — 1p

Deoarece ordinal radicalului trebuie sa fie un nr.natural ≥2, numărul x! va fi totdeauna un număr par $\Rightarrow \frac{2x^2+x-21}{5-4x-x^2} \geq 0 \Rightarrow x \in \left(-5, -\frac{7}{2}\right] \cup (1,3]$ — 3p

Cum $x \in \mathbb{N}$ si x ≥2 $\Rightarrow A = \{2,3\}$ — 1p

4.

$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)} \Rightarrow$ — 3p

$z^{20} = \frac{2^{20}\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right)}{2^{10}\left(\cos 35\pi + i\sin 35\pi\right)} = 2^{10}\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3} - 35\pi\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{3} - 35\pi\right)\right) =$

$= 2^{10}\left(\cos\left(-\frac{95\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{95\pi}{3}\right)\right) = 2^{10}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right) =$

$= 2^{10}\left(\cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^9\left(1+i\sqrt{3}\right)$ — 2p

5.

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 32$ — 1p

Dar $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$ — 1p

$\Rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow$ n=5 — 1p

www.mateinfo.ro

	$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k \Rightarrow T_4=C_5^3\left(2x^2\right)^2\left(-5y\right)^3=-5000x^4y^3$	2p
6.	Ecuaţia dreptei BC este: x+2y-4=0 $A\in BC \Leftrightarrow 4a=4\Rightarrow a=1$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	„ $\Rightarrow$ ” Ştim $\hat{a}^2+\hat{b}^2=\hat{0};\hat{a},\hat{b}\in\mathbb{Z}_3\Rightarrow\begin{cases} pt.a=\hat{0}\Rightarrow \hat{b}^2=\hat{0}\Rightarrow\hat{b}=\hat{0} \\ pt.a=\hat{1}\Rightarrow \hat{1}+\hat{b}^2=\hat{0}\Rightarrow\hat{b}^2=-\hat{1}\Rightarrow\hat{b}^2=\hat{2}\left(nu\ are\ solutii\right)\Rightarrow \\ pt.a=\hat{2}\Rightarrow \hat{1}+\hat{b}^2=\hat{0}\Rightarrow\hat{b}^2=-\hat{1}\Rightarrow\hat{b}^2=\hat{2}\left(nu\ are\ solutii\right)\end{cases}$ $\hat{a}^2+\hat{b}^2=\hat{0}\Rightarrow\hat{a}=\hat{b}=\hat{0}$ „ $\Leftarrow$ ”-se verifică direct	3p 2p
b)	Fie $A=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ -\hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}\in M$;calculam $A^2=\begin{pmatrix}\hat{a}^2-\hat{b}^2 & \hat{2}\hat{a}\hat{b}\\ -\hat{2}\hat{a}\hat{b} & \hat{a}^2-\hat{b}^2\end{pmatrix}$ Relaţia $A^2+I_2=O_2\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{a}^2-\hat{b}^2+\hat{1}=\hat{0}(1)\\ \hat{2}\hat{a}\hat{b}=\hat{0}(2)\end{cases}$ Din (2) $\Rightarrow\hat{a}=\hat{0}$ sau $\hat{b}=\hat{0}$ Pentru $\hat{a}=\hat{0}\overset{in(1)}{\Rightarrow}\hat{b}^2=\hat{1}\Rightarrow\begin{cases}\hat{b}=\hat{1}\\ \hat{b}=\hat{2}\end{cases}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{1}\\ -\hat{1} & \hat{0}\end{pmatrix}\in M$ sau $A=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{2}\\ -\hat{2} & \hat{0}\end{pmatrix}\in M$ Pentru $\hat{b}=\hat{0}\overset{in(1)}{\Rightarrow}\hat{a}^2+\hat{1}=\hat{0}\Rightarrow\hat{a}^2=-\hat{1}\Rightarrow\hat{a}^2=\hat{2}\left(nu\ are\ solutii\ in\ \mathbb{Z}_3\right)$	2p 1p 2p 2p
c)	Mulţimea M are 9 elemente Fie $A=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ -\hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}\in M\Rightarrow\det(A)=\hat{a}^2+\hat{b}^2=\hat{0}\overset{cf.a)}{\Leftrightarrow}\hat{a}=\hat{b}=\hat{0}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}=O_2$ Celelalte 8 elemente din M au determinantul $\neq 0\Rightarrow$ celelalte 8 matrice sunt inversabile	2p 2p 1p
2. a)	$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ $\tau\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow\sigma\tau\neq\tau\sigma$	2p 2p 1p
b)	Not.nr.inversiunilor permutării σ cu $m(\sigma)$ şi signatura cu $\varepsilon^{m(\sigma)}=(-1)^3=-1$ $\Rightarrow m(\sigma)=2+1=3\Rightarrow\varepsilon^{m(\sigma)}=(-1)^3=-1\Rightarrow\sigma$ permutare impară	1p 2p

www.mateinfo.ro

	$m(\tau)=1 \Rightarrow \varepsilon^{m(\tau)}=(-1)^1=-1 \Rightarrow \tau$ permutare impară	2p
c)	$\sigma x = \tau \Rightarrow x = \sigma^{-1}\tau$	2p
	Cum $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\sigma \Rightarrow x=\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$D_f=?$ Condiţia: $1+\frac{2}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x}>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$	2p
	Asimptota orizontală: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\ln 1=0 \Rightarrow ec.asimp.oriz.spre \pm\infty$ este y=0	1p
	Asimptote verticale: $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=-\infty \Rightarrow ec.asimp.vertic.este \quad x=-2$	1p
	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty \Rightarrow ec.asimp.vertic.este \quad x=0$	1p
b)	Calculăm $f'(x)=-\frac{2}{x(x+2)}; D_{f'}=(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$	2p
	Semnul lui f':	
	x: $-\infty$; -2 ; 0 ; $+\infty$ $f'(x)$: $-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$; $+$; $-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$ $f(x)$: $0 \searrow\searrow\searrow\searrow -\infty$; $+\infty$; $\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow 0$	2p
	$\Rightarrow$ funcţia f este strict descrescătoare pe domeniul său	1p
c)	$x_n=\frac{f(1)+f(2)+f(3)+.....+f(n)}{n}=$	3p
	$\frac{\ln\left(1+\frac{2}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{3}\right)+.....+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n}=$	
	$=\frac{\ln\left(\left(1+\frac{2}{1}\right)\left(1+\frac{2}{2}\right)\left(1+\frac{2}{3}\right).....\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)}{n}=$	
	$\frac{\ln\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot.....\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n+2}{n}\right)}{n}=$	
	$=\frac{\ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{n}=\frac{1}{n}\ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}$	
	$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{n}=0$	2p

www.mateinfo.ro

2. a)	$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^0\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$ $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^1\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$	2p 3p
b)	$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot(\cos x)^{n-1}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)'(\cos x)^{n-1}\,dx=$ $=\sin x\cdot(\cos x)^{n-1}\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)(\cos x)^{n-2}\cdot(-\sin^2 x)\,dx=$ $=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{n-2}\cdot(1-\cos^2 x)\,dx=$ $=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{n-2}\,dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n\,dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$ $\Rightarrow I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\Rightarrow I_n+(n-1)I_n=(n-1)I_{n-2}$ $\Rightarrow nI_n=(n-1)I_{n-2}\Big\vert:n\neq 0$ $\Rightarrow I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2},(\forall)\ n\in\boldsymbol{N},n\geq 2$	3p 2p
c)	$f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to[0;1],f(x)=\cos x\Rightarrow$ $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x+1}{2}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x+1)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x dx+\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=$ $=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos 2x dx+\frac{\pi}{2}x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}(\sin 2x)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}(\sin\pi-\sin 0)+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$	 3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 3

Prof: RICU ILEANA

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la10.**

< >

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Notăm cu x cel mai mic unghi şi raţia prin q $\Rightarrow\begin{cases}x+xq+xq^2+xq^3=360\\xq^3=9xq\end{cases}$	2p

www.mateinfo.ro

	$\Rightarrow \begin{cases} x+xq+xq^2+xq^3=360 \\ q^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+xq+xq^2+xq^3=360 \\ q=\pm 3 \end{cases}$ pt.ca este vorba de masuri de unghiuri,q= -3 nu convine $\Rightarrow$q=3(inlocuim în prima ecuaţie) $\Rightarrow$x·40=360$\Rightarrow$x=9 Finalizare:unghiurile sunt 9°;27°;81°;243°	2p 1p
2.	$\Delta=1 \Rightarrow V\left(\frac{2m-1}{2m};\frac{-1}{4m}\right)$ Ecuaţia primei bisectoare:y=x(notam dreapta cu *d)* $V\in d \Leftrightarrow \frac{2m-1}{2m}=\frac{-1}{4m} \Rightarrow 4m^2-m=0 \Rightarrow m_1=0\left(nu\ convine\right); m_2=\frac{1}{4}$	2p 1p 2p
3.	Notăm $\left[\frac{x+3}{4}\right]=k, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x-2}{3}=k, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow$x=3k+2(1) Avem $k\le\frac{x+3}{4}<k+1/\cdot 4 \Rightarrow 4k\le x+3<4k+4 \overset{folos.(1)}{\Rightarrow} 4k\le 3k+5<4k+4/-5$ $\Rightarrow \begin{cases} k\le 5 \\ k>1 \end{cases} \Rightarrow k\in\{2,3,4,5\} \Rightarrow S=\{8,11,14,17\}$	2p 2p 1p
4.	Not. $z=1+i\sqrt{3} \Rightarrow \lvert z\rvert=\sqrt{1+3}=2$ şi $\begin{cases} \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\varphi=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{3} \Rightarrow z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $z^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)(1)$ Analog,pt. $z=1-i\sqrt{3}$ avem $\lvert z\rvert=2, \varphi=-\frac{\pi}{3} \Rightarrow z=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $\Rightarrow z^n=2^n\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right)=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}\right)(2)$ Egalitatea devine: $2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)+2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}\right)=2^n/:2^n\neq 0\left(stim\ 2^n>0,\forall n\in\mathbb{Z}\right)$ $\Rightarrow 2\cos\frac{n\pi}{3}=1\Rightarrow\cos\frac{n\pi}{3}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{n\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\Rightarrow n=\pm 1+6k, k\in\mathbb{Z}$	2p 2p 1p
5.	$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k, 0\le k\le n \Rightarrow T_{k+1}=C_5^k\left(\sqrt{2}\right)^{5-k}$ Termenii dezvoltarii sunt raţionali $\Leftrightarrow$ exponentul 5-k este multiplu de nr.2$\Rightarrow$ $5-k\in\{0,2,4,6,8,.....\}$ Pentru *5-k=0*$\Rightarrow$*k=5(* $k\in\mathbb{N}$ *şi* $0\le k\le 5$)$\Rightarrow T_6=C_5^5\left(\sqrt{2}\right)^0=1$ Pentru *5-k=2*$\Rightarrow$*k=3(* $k\in\mathbb{N}$ *şi* $0\le k\le 5$)$\Rightarrow T_4=C_5^3\left(\sqrt{2}\right)^2=20$ Pentru *5-k=4*$\Rightarrow$*k=1(* $k\in\mathbb{N}$ *şi* $0\le k\le 5$)$\Rightarrow T_2=C_5^1\left(\sqrt{2}\right)^4=20$ Pentru *5-k=6*$\Rightarrow$*k=-1*$\notin\mathbb{N}$ $\Rightarrow T_2+T_4+T_6=41$	2p 1p 1p 1p
6.	$PQ=\sqrt{\left(x_P-x_Q\right)^2+\left(y_P-y_Q\right)^2} \Rightarrow AB=\sqrt{10}; AC=\sqrt{37}; BC=\sqrt{29}$ Avem AC>BC>AB$\Rightarrow \sphericalangle B$ are măsura cea mai mare	3p 1p 1p

www.mateinfo.ro

	$\Rightarrow$ (cf.teor.cosinusului) $\cos B = \frac{\sqrt{290}}{290}$	

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\Delta(x) = e^{2x^2+2x+2a} + 2e^{-x^2-x-a} - e^0 - e^0 - e^0 =$ $= e^{2(x^2+x+a)} + 2e^{-(x^2+x+a)} - 3$	3p 2p
b)	$\left.\begin{matrix}\Delta(x)=0\\ not.\ e^{x^2+x+a}=t\end{matrix}\right\} \Rightarrow t^2+2\cdot\frac{1}{t}-3=0 \Leftrightarrow t^3-3t+2=0 \Rightarrow \begin{cases}t_1=t_2=1\\ t_3=-2\end{cases}$ Avem (1) $e^{x^2+x+a}=1 \Rightarrow x^2+x+a=0$; rădăcini reale strict negative $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\geq 0\\ S<0\\ P>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1-4a\geq 0 \Rightarrow a\leq\frac{1}{4}\\ S=-1<0\\ a>0\end{cases} \Rightarrow a\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$ Avem (2) $e^{x^2+x+a}=-2$;ecuatia nu are solutii	3p 1p 1p
c)	Pentru a=1 $\Rightarrow$ $\Delta(x)=e^{2(x^2+x+1)}+2e^{-(x^2+x+1)}-3$ $not.\ e^{x^2+x+1}=t \Rightarrow \Delta(t)=\frac{t^3-3t+2}{t}=\frac{(t-1)^2(t+2)}{t}$	2p 2p 1p
2. a)	$x\perp(-1)=x+(-1)+1=x, \forall x\in\mathbb{Z}$ $(-1)\perp x=(-1)+x+1=x, \forall x\in\mathbb{Z}$ Finalizare	2p 2p 1p
b)	$(x\circ y)\circ z=(ax+by-1)\circ z=a(ax+by-1)+bz-1=a^2x+aby+bz-a-1(1)$, $x\circ(y\circ z)=x\circ(ay+bz-1)=ax+b(ay+bz-1)-1=ax+aby+b^2z-b-1(2)$, $\overset{(1)\equiv(2)}{\Rightarrow}\begin{cases}a^2=a\\ b=b^2\\ -a-1=-b-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a(a-1)=0\\ b(b-1)=0\\ a=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=0;a_2=1\\ b_1=0;b_2=1\\ a=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=b=0\left(nu\ convine\right)\\ a=b=1\end{cases}$	2p 2p 1p
c)	$f(x\perp y)=f(x)\circ f(y), \forall x,y\in\mathbb{Z}.$ $f(x\perp y)=f(x+y+1)=x+y+1+2=x+y+3, \forall x,y\in\mathbb{Z}.$ $f(x)\circ f(y)=f(x)+f(y)-1=x+2+y+2-1=x+y+3, \forall x,y\in\mathbb{Z}.$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)=\begin{cases}x, x\in[0,+\infty)\\ \frac{mx}{2x+m}, x\in(-\infty,0)\setminus\left\{-\frac{m}{2}\right\}\end{cases}$	1p
	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \Rightarrow f$ nu admite asimptotă orizontală spre $+\infty$	1p
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{mx}{2x+m}=\frac{m}{2}$, cu $m>0 \Rightarrow f$ admite asimptotă orizontală spre - ∞ cu ecuatia $y=\frac{m}{2}$	1p
	Asimp.oblică:	1p

www.mateinfo.ro

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1; n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-x)=0\Rightarrow y=x$ este ecuatia asimptotei oblice spre + ∞

Asimptota verticala: $\begin{cases} l_s\left(-\dfrac{m}{2}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{m}{2}\\ x<-\frac{m}{2}}} f(x)=\dfrac{-\frac{m^2}{2}}{0_-}=+\infty \\ l_d\left(-\dfrac{m}{2}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{m}{2}\\ x>-\frac{m}{2}}} f(x)=\dfrac{-\frac{m^2}{2}}{0_+}=-\infty \end{cases} \Rightarrow x=-\dfrac{m}{2}$ este ecuaţia asimptotei verticale a funcţiei f — 1p

b) $f'(x)=\begin{cases}1, x\in[0,+\infty)\\ \dfrac{m^2}{(2x+m)^2}, x\in(-\infty,0)\setminus\left\{-\dfrac{m}{2}\right\}\end{cases}$ — 2p

Să dem.că f este derivabilă în

$x_0=0:\begin{cases} f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{\frac{mx}{2x+m}}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{mx}{x(2x+m)}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{m}{2x+m}=\dfrac{m}{m}=1 \\ f_d'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{x}{x}=1\end{cases}$

$\Rightarrow f'(0)=1$

x	$-\infty$ $\quad -\frac{m}{2} \quad$	0	$+\infty$
$f'(x)$	++++++++++++	++++++++++++1++++++++++++++++++++	
$f(x)$	$\frac{m}{2}$ ↗↗↗↗↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗↗↗↗↗ 0 ↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗	$+\infty$

— 2p

$\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe domediul de definiţie — 1p

c) Din b) observăm că pentru $x\in\left(-\infty,-\dfrac{m}{2}\right)$ avem $f(x)>\dfrac{m}{2}>0\Rightarrow f$ nu are soluţii — 2p

Pentru $x\in\left(-\dfrac{m}{2},+\infty\right)$ valorile lui f sunt strict crescătoare de la - ∞ la $+\infty\Rightarrow f$ are o singura soluţie reală situată în intervalul $\left(-\dfrac{m}{2},+\infty\right)$,anume x=0 — 3p

2.

a) $I_n+I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tgx)^n\left(1+tg^2x\right)dx=\dfrac{(tgx)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{n+1}, n\in\mathbb{N}, n\geq2$ — 3p

Calculăm $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\dfrac{\pi}{4}$ şi ţinând seama de recurenţa de mai sus ,obţinem

$I_2=1-I_0=1-\dfrac{\pi}{4}$ — 2p

www.mateinfo.ro

b)	Avem că $tg^n x \geq 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ prin integrare,obţinem $I_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$	2p
	Deoarece tgx≤1, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \Rightarrow I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tgx)^n (tgx - 1)\, dx \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ sau	2p
	$I_{n+1} \leq I_n, \forall n \in \mathbb{N}$ deci şirul este descrescător. Atunci $0 \leq I_n \leq I_0, \forall n \in \mathbb{N}$,deci şirul este şi mărginit. $\Rightarrow$ sir convergent	1p
c)	Deoarece $I_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ şi folosind relaţia de recurenţă de la a) $\Rightarrow$	2p
	$\frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+2} \geq I_{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}$, sau $I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$,	1p
	Atunci $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi aplicând criteriul cleştelui $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} I_n = 0$	2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: **Şerban George-Florin**

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a^2-2a+1=(a-1)^2$ $a^2-2a+1=(a-1)^2=i^2=-1$	3p 2p
2.	f (1)=1 , $f(f(1))=1$ $f^{-1}(f(1))=1$ $f(f(1))-f^{-1}(f(1))$=1-1=0	1p 2p 2p
3.	$8^x=27$ $x=\log_8 27$	2 p 3 p
4.	Cazuri favorabile : 27 , 64 . Cazuri posibile : 10 ,11 ,.....,99 - sunt 90 cazuri posibile . $P(A)=\frac{nr(cazfav)}{nr(cazpos)}=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$	2p 3p
5.	$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{BC}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{i}+\vec{j}=2\cdot\vec{j}$ Lungimea vectorului $\overrightarrow{BC}$ este egala cu 2 .	2p 2p 1p
6.	$A_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{720}$	2p

www.mateinfo.ro

	$R=\frac{abc}{4S}$ $R=\frac{126}{\sqrt{720}}$	1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=1+a^2$ $\det A^3=(1+a^2)^3$ $\det A^3=(1+a^2)^3=1+3a^2+3a^4+a^6$	2p 2p 1p
b)	$A^2=\begin{pmatrix}1-a^2 & -2a\\ 2a & 1-a^2\end{pmatrix}$, $2\cdot A=\begin{pmatrix}2 & -2a\\ 2a & 2\end{pmatrix}$, $(a^2+1)\cdot I_2=\begin{pmatrix}a^2+1 & 0\\ 0 & a^2+1\end{pmatrix}$, $A^2-2\cdot A+(a^2+1)\cdot I_2=O_2$	3p 2p
c)	Matricea A este inversabilă deoarece $\det A=1+a^2\neq 0$ $A^2-2\cdot A+(a^2+1)\cdot I_2=O_2$, înmulţesc cu A^{-1} $A-2\cdot I_2+(a^2+1)\cdot A^{-1}=O_2$, $(a^2+1)\cdot A^{-1}-2\cdot I_2$ **=-A**	1p 2p 2p
2. a)	R=f(-2) Teorema restului sau schema împărţirii . f(-2)=-15=R	2 p 3p
b)	$f=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)$, $f(-2)=-(2+x_1)\cdot(2+x_2)\cdot(2+x_3)$ $(2+x_1)\cdot(2+x_2)\cdot(2+x_3)=-f(-2)=15$	3p 2p
c)	Dacă f ar avea rădăcini întregi acestea ar fi printre divizorii întregi a lui 5 , adică 1 , -1 , 5, -5 . f (1)=-6 , f (-1)=-6 , f (5)=90 , f (-5)=-150 . Deci f nu are rădăcini întregi .	2p 3 p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

www.mateinfo.ro

1. a)	$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$	1p
		3p
	$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-2x^4}{(x^2+1)^2}$	1p
	$f'(x)\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$	
b)	y=mx+n , $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)$	1p
	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3+x}=1$	1p
	$n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=n=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^3}{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{-x}{x^2+1})=0$	1p
	y=x este asimptotă oblică la ∞ .	2p
c)	$f(n)\geq 1$, $n^3\geq n^2+1$, $n^3-n^2\geq 1$, $n^2(n-1)\geq 1$ adevărat pentru orice n natural diferit de 0 şi 1 . f(1)=$\frac{1}{2}$	1p
	$a_n=f(1)+f(2)+.....+f(n)>\frac{1}{2}+1+1+.....+1=\frac{1}{2}+n-1=n-\frac{1}{2}$	1p
	$a_{n+1}-a_n=f(n+1)>0$, şirul a_n este strict crescător , deci are limită .	1p
	$\lim\limits_{n\to\infty}a_n>\lim\limits_{n\to\infty}(n-\frac{1}{2})=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$	2p
2. a)	$I_1=\int_0^1 y\cdot e^{y+1}dy$ am făcut schimbarea de variabilă x-1=y	1p
	$I_1=\int_0^1 y\cdot e^{y+1}dy=\int_0^1 y\cdot(e^{y+1})'dy=e^2-0-\int_0^1 e^{y+1}dy=e^2-(e^2-e)=e$	3p 1p
	Am aplicat integrarea prin părţi .	

www.mateinfo.ro

b)	$In=\int_0^1 y^n\cdot(e^{y+1})'dy=e^2-0-n\int_0^1 y^{n-1}\cdot e^{y+1}dy$ Am aplicat integrarea prin părţi . $In=e^2-n\int_0^1 y^{n-1}\cdot e^{y+1}dy=e^2-n\cdot I_{n-1}$	1p 1p 3p
c)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 y^n\cdot(y-1)\cdot e^{y+1}dy<0$ Şirul I_n este strict descrescător . Deci $I_n\le I_1=e$, $I_n\le e$.	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: **Şerban George-Florin**

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_4=\frac{10+16}{2}=13$, r =13-10 =3 , $a_1=4$ $a_n=a_1+(n-1)r$, $a_{50}=4+49\cdot 3=151$	3p 2p
2.	$min(f(x))=\frac{-\Delta}{4a}$ $\Delta=b^2-4ac=4$	1p 1p 3p

www.mateinfo.ro

	$min(f(x))=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-4}{4}=-1$	
3.	$3^{3x+6}=3^4$ 3x+6=4 , 3x= -2 S={$-\frac{2}{3}$}	1p 2p 2p
4.	Cazuri favorabile : 12 , 21, 13 , 31 , 15, 51 , 17 , 71 (8 cazuri favorabile).Cazuri posibile : 10 ,11 ,.....,99 - sunt 90 cazuri posibile . P(A)= $=\frac{nr(cazfav)}{nr(cazpos)}=\frac{8}{90}=\frac{4}{45}$	2p 3p
5.	M(x,y) , $(x-1)\vec{i}+(y+1)\vec{j}=5\cdot(-2-x)\vec{i}+5\cdot(3-y)\vec{j}$ x-1=-10-5x , x = $-\frac{9}{6}$, y+1=15 -5y , y = $\frac{14}{6}$, M ($-\frac{9}{6}$, $\frac{14}{6}$)	2p 3p
6.	$sin^3 x=cos^3 x$. Dacă cos x=0 rezultă că $x=\frac{\pi}{2}$, $sin\frac{\pi}{2}=1$, deci $x=\frac{\pi}{2}$ nu este soluție a ecuației . Presupun că $cos x\neq 0$, $tg^3 x=1$, dar tgx>0 deci tgx=1 $x=\frac{\pi}{4}$ S={$\frac{\pi}{4}$}.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	detA(x)=0 , detA(x)= x^3-3x+2 detA(x)= $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)=0$ S={1,-2}	2p 2p 1p
b)	$A(x)\cdot A(-x)=\begin{pmatrix} 2-x^2 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x^2 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x^2 \end{pmatrix}$	3p 2p

www.mateinfo.ro

c)	$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ $A^{-1}(2)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	1p 4p
2. a)	$2\circ 3=\sqrt{2^2\cdot 3^2-2^2-3^2+2}$ $2\circ 3=\sqrt{2^2\cdot 3^2-2^2-3^2+2}=\sqrt{25}=5$ $2\circ 3=5$	1p 3p 1p
b)	$x\circ e=e\circ x=x$, există $e\in(1,\infty)$, $\forall x\in(1,\infty)$ $\sqrt{x^2\cdot e^2-x^2-e^2+2}=\sqrt{e^2\cdot x^2-e^2-x^2+2}=x$ $(e^2-2)(x^2-1)=0$, e=$\sqrt{2}\in(1,\infty)$	1p 1p 3p
c)	$x\circ y=\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1}$, $x\circ x=\sqrt{(x^2-1)^2+1}$ $x\circ x\circ x\circ x=\sqrt{(x^2-1)^2+1}\circ\sqrt{(x^2-1)^2+1}=\sqrt{(x^2-1)^4+1}=2$ $(x^2-1)^4=3$, $x^2-1=\sqrt[4]{3}$, $x^2=\sqrt[4]{3}+1$, $x=\sqrt{\sqrt[4]{3}+1}\in(1,\infty)$, $S=\{\sqrt{\sqrt[4]{3}+1}\}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=(e^x)'-x'-1'$ $f'(x)=e^x-1-0$ $f'(x)=e^x-1$	2p 2p 1p
b)	$f'(x)=e^x-1=0$, $e^x=1$, x=0 .	1p 1p

www.mateinfo.ro

	x | $-\infty$ | 0 | ∞ $f'(x)$ | - - - - 0 + + + ...+ f(x) | ∞ \ \ \ 0 / / /	1p 2p
	Punctul O (0 ,0) punct de minim .	
c)	$f(x)\geq f(0)=0$, pentru orice x număr real .	1p
	$e^x \geq x+1$	1p
	$e^{\sqrt{2}} \geq \sqrt{2}+1>1,4+1=2,4=\frac{12}{5}$	3p
2. a)	$\int \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}ln(x^2+1)+c=F(x)$	2p 2p
	$F(\sqrt{e-1})=\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+c$, c=1	1p
	$F(x)=\frac{1}{2}ln(x^2+1)+1$	
b)	$0\leq x^n f(x)=\frac{x^{n+1}}{x^2+1}\leq x^{n+1}$, $\forall x\in[0,1]$	1p
	Integrez de la 0 la 1 .	
	Notez $I_n=\int_0^1 x^n\cdot f(x)dx$, $I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}\cdot(x-1)}{x^2+1}dx<0$, deci şirul I_n este strict descrescător , deci are limită .	1p 2p
	$0\leq\int_0^1 x^n f(x)dx\leq\int_0^1 x^{n+1}dx=\frac{1}{n+2}$	
	Se trece la limită $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\cdot f(x)dx=0$	1p
c)	$\int(x^4+1)\cdot e^x\cdot f(x^2)dx=\int x^2e^x dx$. Se integrează prin părţi de două ori .	1p
	$\int(x^4+1)\cdot e^x\cdot f(x^2)dx=\int x^2e^x dx=\int x^2(e^x)'dx=x^2e^x-2\int xe^x$	1p

www.mateinfo.ro

	$\int (x^4+1)\cdot e^x \cdot f(x^2)dx = x^2e^x - 2\int xe^x = x^2e^x - 2\int x(e^x)'dx = x^2e^x - 2(xe^x - \int e^x dx)$	1p
	$\int (x^4+1)\cdot e^x \cdot f(x^2)dx = = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c \quad , c \in R$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: **Şerban George-Florin**

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_4 = \frac{26+16}{2} = 21$, r =21-16 =5 , $a_1 = 6$, $a_n = a_1 + (n-1)r$, $a_{10} = 6 + 9\cdot 5 = 51$	3p
	$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})\cdot 10}{2} = \frac{(6+51)\cdot 10}{2} = 285$	2p
2.	$V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$	1p
	$\frac{-b}{2a}$ =0 , $\frac{-\Delta}{4a}$ =1	2p
	Punctul de maxim este V (0,1)	2p
3.	Condiţie x-5>0 , x>5 , $x \in (5,\infty)$	1p
	$x-5 = 2^2 = 4$, x=9$\in (5,\infty)$	2p
	S={9}	2p
4.	$\overline{abc}$: $\overline{102}$, $\overline{103}$, $\overline{104}$, $\overline{120}$, $\overline{123}$, $\overline{124}$, $\overline{130}$, $\overline{132}$, $\overline{134}$, $\overline{140}$, $\overline{142}$, $\overline{143}$	2p

www.mateinfo.ro

	adică $A_4^2 = 12$ Avem în total $4 \cdot A_4^2 = 48$ numere .	3p
5.	M(x,y) , $(x-2)\vec{i}+(y+1)\vec{j} = 2\cdot(-2-x)\vec{i}+2\cdot(3-y)\vec{j}$ x-2=-4-2x , $x=-\frac{2}{3}$, y+1=6 -2y , $y=\frac{5}{3}$, M $(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$	2p 3p
6.	$\cos^2 x = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ $\cos^2 x = 1$, cos x >0 , cos x=1 , $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, x=0 S={0} .	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	det A=0 deoarece liniile 1 şi 3 coincid . $det(A^{10}) = (detA)^{10} = 0$	2p 3p
b)	$A^2(x) = \begin{pmatrix} 2x^2 & 0 & 2x^2 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 2x^2 & 0 & 2x^2 \end{pmatrix} \in M_3(R)$ $A(x)+A^2(x)+A^3(x)+A^4(x) = \begin{pmatrix} S & 0 & S \\ 0 & T & 0 \\ S & 0 & S \end{pmatrix}$ unde $S = x+2x^2+4x^3+8x^4 = x\cdot(1+2x+4x^2+8x^3) = \frac{x\cdot[(2x)^4-1]}{2x-1} = \frac{x\cdot(16x^4-1)}{2x-1}$, daca $x \neq \frac{1}{2}$, daca $x = \frac{1}{2}$ atunci S=2 . $T = x+x^2+x^3+x^4 = \frac{x\cdot(x^4-1)}{x-1}$,dacă $x \neq 1$. Dacă x=1 , T=4 .	1p 2p 1p 1p
c)	$det(A(2)\cdot {}^tA(2)) = 0$	1p 2p

www.mateinfo.ro

	$A(2)\cdot {}^tA(2)=\begin{pmatrix}8&0&8\\0&4&0\\8&0&8\end{pmatrix}$ Există un minor de ordinul 2 nenul $\begin{vmatrix}8&0\\0&4\end{vmatrix}=32$, $rang(A(2)\cdot {}^tA(2))=2$	2p
2. a)	Aplic relaţiile lui Viete : $x_1+x_2+x_3+x_4=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=0$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$	1p 1p 2p 1p
b)	Aplic teorema restului , $R=f(1+i)$ $R=f(1+i)=(1+i)^4+16=(1+2i+i^2)^2+16=-4+16=12$	2p 3p
c)	$f=x^4+16=x^4+8x^2+16-8x^2=(x^2+4)^2-(2\sqrt{2}x)^2$ $f=x^4+16=(x^2+4+2\sqrt{2}x)\cdot(x^2+4-2\sqrt{2}x)$ f este reductibil in R[x]	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=x'-(arctgx)'=1-\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}$ $f''(x)=\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)'=\frac{2x\cdot(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$	2p 3p
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x'-(arctgx)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{3}$ Am aplicat regula lui L Hospital .	1p 1p 1p 2p

www.mateinfo.ro

c)	ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul O (0,0) este :	1p
	$y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$	2p
	f (0)=0 , $f'(0)=0$.	2p
	y =0 ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul O (0,0)	
2. a)	$I_0=\int_0^1 f_0(x)dx=\int_0^1 x'arctgxdx=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx$ (am aplicat integrarea prin părţi)	2p
	$\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}ln(2)$	2p
	$I_0=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}ln(2)$	1p
b)	$I_1=\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1 x\cdot arctgxdx=\int_0^1(\frac{x^2}{2})'arctgxdx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{x^2+1}dx$ (am aplicat integrarea prin părţi)	2p
	$\int_0^1\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\int_0^1(1-\frac{1}{x^2+1})dx=\int_0^1 1dx-\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=1-\frac{\pi}{4}$	2p
	$I_1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\pi-2}{4}$	1p
c)	Folosim inegalitatea $arctgx\le x$, $\forall x\in[0,1]$	1p
	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 x^n\cdot(x-1)\cdot arctgxdx<0$, deci şirul I_n este strict descrescător , deci are limită	1p
	$0\le\int_0^1 x^n\cdot(arctgx)dx\le\int_0^1 x^n\cdot xdx=\int_0^1 x^{n+1}dx=\frac{1}{n+2}$	2p
	$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\cdot f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0$	1p

www.mateinfo.ro

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta1

Prof:Soare Roxana

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Notăm $a=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ şi $b=\sqrt{2+\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lvert z\rvert = 2^{2012}$	3p 2p
2.	$\Delta = 49$ $x \in \left[-2,\frac{1}{3}\right] \cap Z$ $x \in \{-2,-1,0\}$	1p 2p 2p
3.	$sinx+\sqrt{3}cosx=1 \Leftrightarrow sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ $x+\frac{\pi}{3} \in \left\{(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi / k \in Z\right\}$ $x \in \left\{\frac{\pi}{2},\frac{11\pi}{6}\right\}$	1p 2p 2p
4.	Între 1 şi 200 sunt $\left[\frac{200}{3}\right]=66$ numere divizibile cu 3, $\left[\frac{200}{5}\right]$=40 numere divizibile cu 5, $\left[\frac{200}{15}\right]$=13 numere divizibile cu 15 , deci de la 1 la 200 sunt 66+40-13=93 numere divizibile cu 3 sau cu 5 , deci 200-93=107 nu sunt divizibile nici cu 3 , nici cu 5.	2p 3p
5.	$(a+1)(2a+1)-(2a-1)(3a+1)=0$ $a_1=1-\sqrt{2}$	2p 3p

www.mateinfo.ro

	$a_2 = 1 + \sqrt{2}$	
6.	$R = \frac{abc}{4S}$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{455}$ $R = \frac{144}{\sqrt{455}}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$I_2 = A(0) \in G$ $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} = A(2) \in G$	2p 3p
b)	$A(a)A(b) = A(a+b-3ab)$ $a \neq \frac{1}{3}, b \neq \frac{1}{3} \Rightarrow a+b-3ab \neq \frac{1}{3} \Rightarrow A(a+b-3ab) \in G \Rightarrow$ G parte stabilă a lui $GL_2(IR)$ $(A(a))^{-1} = A\left(\frac{a}{3a-1}\right) \in G$	2p 1p 2p
c)	$(A(a))^2 = A(2a-3a^2)$ $(A(a))^3 = A(9a^3-11a^2+3a)$ $a \in \{-1,0,2\}$	1p 2p 2p
2. a)	$Z_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ $\hat{1}^4 = \hat{1}$ $\hat{2}^4 = \hat{1}$ $\hat{3}^4 = \hat{1}$ $\hat{4}^4 = \hat{1}$	1p 1p 1p 1p 1p
b)	$f(\hat{0}) = \hat{4}, f(\hat{1}) = \hat{0}, f(\hat{2}) = \hat{0}, f(\hat{3}) = \hat{0}, f(\hat{4}) = \hat{4}$, deci rădăcinile în Z_5 ale polinomului f sunt $\hat{1}, \hat{2},, \hat{2}, \hat{3}$	3p 2p

www.mateinfo.ro

c)	$X+\hat{4}\mid f, (X+\hat{3})^2 \mid f, X+\hat{2}\mid f \Rightarrow$ $\Rightarrow f = \hat{2}(X+\hat{2})(X+\hat{3})^2(X+\hat{4})$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Dreapta y=1 este asimptotă orizontală către $-\infty$ *și către* $+\infty$ f nu admite asimptote oblice dreapta x= -1 este asimptotă verticală	2p 1p 2p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty} x^3 \ln f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3 \ln\frac{x^3-1}{x^3+1} =$ $=\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\frac{x^3-1}{x^3+1}}{\frac{1}{x^3}} =$ $=\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2x^6}{x^6-1} =$ =-2	1p 1p 2p 1p
c)	$f(x)=\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x(x+1)+1}{x(x-1)+1}$ $f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(n) = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)} = \frac{2}{3}$	1p 3p 1p
2. a)	$a_n = \ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ $a_{n+1}-a_n = \ln\frac{n(n+2)^2}{(n+3)(n+1)^2} < 0 \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ este șir strict descrescător. (1) $a_n = \ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} > 0 \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ mărginit inferior. (2) Din (1) și (2) $\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ convergent.	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

b)	$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 ln\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} =$	1p
	$= \lim\limits_{n\to\infty} ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n^2} =$	1p 1p
	$= ln \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2} =$	2p
	$= lne =$	
	$=1$	
c)	$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = ln\frac{2(n+1)}{n+2}$	3p
	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = ln2$	2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Soare Roxana

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\begin{cases} a_1+2r=5 \\ a_1+5r=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=1 \\ r=2 \end{cases}$ $S_{100}=\frac{100(2a_1+99r)}{2}=10000$	3p 2p
2.	$x_V=\frac{m+1}{2}$ $y_V=\frac{-m^2+2m+7}{4}$ $V\in P: y=-x^2+2x+1$	1p 2p 2p
3.	C.E. $3x^2-2x+8\geq 0, 3x^2-2x+3\geq 0 \Rightarrow x\in IR$. Notăm $3x^2-2x+3=y\geq 0$ şi obţinem: $\sqrt{y+5}+\sqrt{y}=5\Leftrightarrow 2\sqrt{y(y+5)}=2(10-y)$ C.E $y\leq 10\Rightarrow y\in[0,10]$ Se obţine $y=4\Leftrightarrow 3x^2-2x+3=4\Leftrightarrow 3x^2-2x-1=0$ $x\in\left\{-1,\frac{1}{3}\right\}$	1p 2p 2p

www.mateinfo.ro

4.	$f(-2)=f(2)\Rightarrow$ definim funcţii de pe o mulţime cu 4 elemente cu valori într-o multime cu 6 elemente Se pot defini 6^4=1296 funcţii.	2p 3p
5.	M este punctul care împarte segmentul [BC] în raportul $\frac{2}{5}$ $\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}}{1+\frac{2}{5}}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$	2p 3p
6.	$cosx=-\frac{12}{13}$ $tg\frac{x}{2}=\frac{sinx}{1+cosx}$ $tg\frac{x}{2}=5$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$detA=\begin{vmatrix}2&-3&4\\1&1&2\\3&-2&6\end{vmatrix}=0$ $d_1=\begin{vmatrix}2&-3\\1&1\end{vmatrix}=5\neq 0\Rightarrow$ $\Rightarrow$rangA=2.	2p 2p 1p
b)	$d_{car}=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&1&3\\3&-2&4\end{vmatrix}=0\Rightarrow rang\bar{A}=2=rangA\Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat. Notăm $z=\alpha$ şi obţinem $x=2-2\alpha, y=1$	3p 2p
c)	Avem $\lvert 2-2\alpha_0+1+\alpha_0\rvert\leq 3\Leftrightarrow\lvert\alpha_0-3\rvert\leq 3\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -3\leq\alpha_0-3\leq 3\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0\leq\alpha_0\leq 6\Rightarrow$ sistemul are 7 soluţii cu proprietatea $\lvert x_0+y_0+z_0\rvert\leq 3$	1p 2p 2p

www.mateinfo.ro

2.	$x*y=2xy-6x-6y+18+3=$	1p
a)	$=2x(y-3)-6(y-3)+3=$	3p
	$=2(x-3)(y-3)+3$	1p
b)	$(x*y)*z=4(x-3)(y-3)(z-3)+3,\forall x,y,z\in IR \quad (1)$	2p
	$x*(y*z)=4(x-3)(y-3)(z-3)+3,\forall x,y,z\in IR \quad (2)$	2p
	Din (1) şi (2) $\Rightarrow (x*y)*z=x*(y*z),\forall x,y,z\in IR \Rightarrow$ legea "$*$" este asociativă.	1p
c)	Prin inducţie $\underbrace{x*x*x*....*x}_{de\ n\ ori}=2^{n-1}(x-3)^n+3,\forall n\in IN^*$	2p
	$\underbrace{x*x*x*....*x}_{de\ 2012\ ori}=2^{2011}(x-3)^{2012}+3$	1p
	$2^{2011}(x-3)^{2012}+3=2^{2011}+3\Rightarrow x\in\{2,4\}$	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	$f_3'(x)=3x^2+6x$	2p
a)	$f_2(x)=x^2$	2p
	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_3'(x)}{f_2(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+6x}{x^2}=3$	1p
b)	$f_n'(x)=n(1+x)^{n-1}-n$	2p
	$f_n'(x)=0\Leftrightarrow x=0$	1p
	x | -1 | 0 | ∞ $f_n'(x)$ | / | ---------- 0 | ++++++++++ $f_n(x)$ | / | $\downarrow$ | 0 | $\uparrow$ min	2p
c)	$f_n''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}\geq 0\ \forall x\in(-1,\infty),\forall n\in IN,n\geq 2$	3p
	$\Rightarrow f_n$ convexă pe $(-1,\infty),\forall n\in IN,n\geq 2$	2p

www.mateinfo.ro

2.	$f:IR\to IR, f(t)=(t^3-3t+2)e^{3t}$ este continuă pe IR, deci admite primitive pe IR. Fie $G:IR\to IR$	2p
a)	o primitivă a lui f . Atunci $F(x)=G(x)-G(0)$	2p
	$\Rightarrow F'(x)=f(x)=(x^3-3x+2)e^{3x}$	1p
b)	$F'(x)=0\Leftrightarrow x^3-3x+2=0\Leftrightarrow$	1p
	$\Leftrightarrow(x-1)^2(x+2)=0\Leftrightarrow$	1p
	$\Leftrightarrow x_1=x_2=1, x_3=-2$	1p
	$x_3=-2$ *este punct de minim şi* F↘ pe intervalul $(-\infty,-2]$ şi F↑ pe [-2,∞)	2p
c)	$F''(x)=3(x-1)(x^2+2x-1)e^{3x}$	3p
	Punctele de inflexiune sunt	
	$x_1=1, x_2=-1-\sqrt{2}, x_3=-1+\sqrt{2}$	2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Soare Roxana

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\begin{cases} b_1 \cdot q = 6 \\ b_1 \cdot q^4 = 162 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 3 \\ b_1 = 2 \end{cases}$ $S_{2012} = 3^{2012} - 1 < 3^{2012}$	3p 2p
2.	$x^2 + 2x + 5 \geq 4$ $x^2 + 4x + 8 \geq 4$ $(x^2 + 2x + 5)(x^2 + 4x + 8) \geq 16$	2p 2p 1p
3.	$arctg3 = x \Leftrightarrow tgx = 3$ $cos2x = \frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x}$ $cos2x = \frac{1-9}{1+9} = -\frac{4}{5}$	1p 2p 2p
4.	$\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} = \frac{2(100-k)}{k+1}$ $\frac{2(100-k)}{k+1} \geq 1 \Leftrightarrow k \leq 66\frac{1}{3} \Rightarrow$ cel mai mare termen este T_{68}	2p 3p

www.mateinfo.ro

5.	ABCD paralelogram $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$ de unde rezultă	3p
	D(-3,3)	2p
6.	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} = \lvert\overrightarrow{AC}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{AF}\rvert cos(\widehat{\overrightarrow{CAF}})$	2p
	$m(\widehat{\overrightarrow{CAF}}) = 90^0$	2p
	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} = 0.$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A = \begin{pmatrix} m^2 & 2m & 1 \\ 1 & m^2 & 2m \\ 2m & 1 & m^2 \end{pmatrix}$	2p
	$detA = \begin{vmatrix} m^2 & 2m & 1 \\ 1 & m^2 & 2m \\ 2m & 1 & m^2 \end{vmatrix} = (m^3+1)^2$	2p
	$detA = 0 \Leftrightarrow m = -1$	1p
b)	Pentru m=-1 se obţine sistemul :	
	$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$	1p
	$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow rangA = 2$	2p
	Notăm $z = \alpha \Rightarrow x = \alpha, y = \alpha \Rightarrow S = \{(\alpha,\alpha,\alpha)/\alpha \in IR\}$	2p
c)	$\alpha^4 + \alpha^4 + \alpha^4 \leq 48 \Leftrightarrow 3\alpha^4 \leq 48 \Leftrightarrow \alpha^4 \leq 16$	3p
	$\alpha \in \{-2,-1,0,1,2\}$, deci 5 soluţii ale sistemului verifică proprietatea din enunţ.	2p
2.	a poate lua 7 valori	2p
a)	b poate lua 7 valori	2p
	Mulţimea M are 49 elemente.	1p
b)	Dacă $A = O_2 \Rightarrow detA = \hat{0}.$	1p

www.mateinfo.ro

	Dacă $detA = \hat{0} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \hat{0}$.	2p
	$\forall x \in Z_7 \Rightarrow x^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$	
	Dacă $a \neq \hat{0} \Rightarrow a^2 + b^2 \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}\}$, deci $a^2 + b^2 = \hat{0} \Rightarrow a = b = \hat{0}$	2p
c)	$\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{6} & \hat{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \hat{3}b \\ \hat{2}b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \hat{4}b & \hat{2}a + \hat{3}b \\ \hat{6}a + \hat{2}b & a + \hat{4}b \end{pmatrix}$	2p
	Se obţine sistemul : $\begin{cases} a + \hat{4}b = \hat{2} \\ \hat{6}a + \hat{2}b = \hat{4} \end{cases}$ cu soluţia	1p
	$a = \hat{5}, b = \hat{1}$	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Dreapta $x = -\frac{1}{2}$ este asimptotă verticală la dreapta	2p
	f nu are puncte de discontinuitate, deci nu admite alte asimptote verticale	1p
	dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$	2p
b)	$f'(x) = \frac{2}{2x+3} - \frac{2}{2x+1} =$	1p
	$= \frac{4x + 2 - 4x - 6}{(2x+3)(2x+1)} =$	1p
	$= \frac{-4}{(2x+3)(2x+1)} < 0 \Rightarrow$	1p
	$\Rightarrow$ f strict descrescătoare pe $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$	2p
c)	$f''(x) = \frac{32(x+1)}{(2x+3)^2(2x+1)^2}$	3p
	$f''(x) > 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \Rightarrow f$ nu are puncte de inflexiune.	2p
2.	Definim funcţia $f: [0, \infty) \to IR, f(x) = \ln(1+x) - x$	1p

www.mateinfo.ro

a)	$f'(x) = \frac{-x}{1+x} \leq 0, \forall x \in [0, \infty)$ $\Rightarrow$ f este strict descrecătoare pe $[0, \infty) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in [0, \infty)$	2p 1p 1p
b)	$I_{n+1} \leq I_n$ $I_n \geq 0$ (I_n) monoton descrescător şi mărginit inferior implică (I_n) convergent.	2p 2p 1p
c)	$0 \leq \ln(1+x) \leq x, \forall x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^{n+1}, \forall x \in [0,1] \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_n = 0.$	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Stan Adrian

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2}=7-4\sqrt{3}$, $\sqrt{\left(4\sqrt{3}-7\right)^2}=7-4\sqrt{3}$. $a=0\in\mathbb{Z}$;	2p 2p 1p
2.	Din $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\Rightarrow$ $\frac{x^2-6+4x+3}{2}=3x\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x\in\{-1;3\}$.	1p 2p 2p
3.	$-\frac{\Delta}{4a}=1\Leftrightarrow$ $-\frac{5m^2+10m+9}{4m}=1$ $\Rightarrow 5m^2+14m+9=0\Rightarrow m\in\left\{-\frac{9}{5},-1\right\}$	1p 2p 2p
4.	Ecuaţia dată este echivalentă cu $2x^2+3x+1=0$. $x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{2}$.	2p 3p
5.	Vectorii $\vec{v_1},\vec{v_2}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow\frac{a-2}{-8}=\frac{-4}{a+2}$ Din $a^2-4=32\Rightarrow a\in\{-6;6\}$.	2p 3p
6.	Se scrie mai întâi ecuaţia dreptei (AB), după formula $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Rezultă, $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{1-2}\Rightarrow x+y-1=0$. Distanţa de la punctul $C(4;3)$ la dreapta AB este dată de formula $d(C,AB)=\frac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$	1p 2p 2p

www.mateinfo.ro

	şi este egală cu $\frac{\lvert 4+3-1\rvert}{\sqrt{1+1}}=3\sqrt{2}$.	

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$X(a)\cdot X(b)=(I_2-aA)(I_2-bA)=I_2-bA-aA+abA^2=I_2-(a+b-ab)A=X(a+b-ab)$, deoarece $A^2=A$; Cum $X(a)\cdot X(1)=X(a+1-a\cdot 1)=X(1),\forall a\in\mathbb{R}$ şi $1\in\{0;1;2;...,2014\}\Rightarrow$ $X(0)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot ...\cdot X(2014)=X(1)=I_2-A=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 10 & 5\end{pmatrix}$;	2 p 3 p
b)	Cum $X(a)=I_2-a\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5a & 2a\\ -10a & -4a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-5a & -2a\\ 10a & 1+4a\end{pmatrix}$. Atunci, $\det(X(a))=\begin{vmatrix}1-5a & -2a\\ 10a & 1+4a\end{vmatrix}=(1-5a)(1+4a)+2a\cdot 10a=1-a$; $\det(X(a))=0\Leftrightarrow 1-a=0\Rightarrow a=1$. Pentru a = 1 rezultă că există o singură matrice neinversabilă;	2 p 2 p 1 p
c)	Dacă X(a) este inversabilă, rezultă că există $(X(a))^{-1}$ astfel încât $X(a)\cdot(X(a))^{-1}=I_2$. Vom nota cu X(b) pe $(X(a))^{-1}$ rezultând $X(a)\cdot X(b)=I_2\Leftrightarrow X(a+b-ab)=I_2\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}1-5(a+b-ab) & -2(a+b-ab)\\ 10(a+b-ab) & 1+4(a+b-ab)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$ a+b-ab=0 de unde rezultă că $b=\frac{a}{a-1}$; Aşadar, pentru $b=\frac{a}{a-1}$ se obţine inversa matricei X(a) şi anume $(X(a))^{-1}=X(b)=X\left(\frac{a}{a-1}\right)$.	1 p 2 p 2 p
2. a)	$x^2+1=0\Rightarrow x=\pm i$ $g(X)=(X-i)(X+i)$.	3 p 2 p
b)	Polinomul f este divizibil cu polinomul $g(X)=X^2+1\Leftrightarrow f(i)=f(-i)=0$ ceea ce este adevărat deoarece $f(i)=(i^2+i+1)^{10}+(i^2+1)^{10}+1=i^{10}+1=i^2+1=-1+1=0$. Analog pentru f(-i).	2 p 3 p
c)	$f(X)=(X^2+X+1)^{10}+(X^2+1)^{10}+1=$ $=C_{10}^0(X^2+1)^{10}+C_{10}^1(X^2+1)^9\cdot X+C_{10}^2(X^2+1)^8\cdot X^2+.....+C_{10}^{10}X^{10}+(X^2+1)^{10}+1=$	

www.mateinfo.ro

	$=2(X^2+1)^{10}+10(X^{19}+9X^{17}+...)+....=$ Observăm că a_{19} este coeficientul lui X^{19} prin urmare $a_{19}=10$.	2 p 2 p 1 p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=(2x-4)e^{x^2-4x+2}$; $f'(0)=-4e^2$;	3p 2p
b)	f este crescătoare pe $[2;\infty)$ deoarece $f'(x)\rangle 0$ și este descrescătoare pe $(-\infty;2]$ deoarece $f'(x)\langle 0$. x=2 este punct de extrem local.	2p 2p 1p
c)	Cum f este descrescătoare pe $[0;1]\Rightarrow 0\le x\le 1\Rightarrow f(1)\le f(x)\le f(1)$. Se calculează f(1) și f(0), $\Rightarrow \frac{1}{e}\le f(x)\le e$	3p 2p
2. a)	$\int_0^1 \frac{x^3-1}{x+2}dx=\int_0^1\left(x^2-2x+4-\frac{9}{x+2}\right)dx=$ $\left(\frac{x^3}{3}-x^2+4x-9\ln(x+2)\right)\Big\vert_0^1=\frac{10}{3}-9\ln\frac{3}{2}$.	2p 3p
b)	$V=\pi\int_0^1\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(1-\frac{3}{x+2}\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(1-\frac{6}{x+2}+\frac{9}{(x+2)^2}\right)dx$ $=\pi\left(x-6\ln(x+2)-\frac{9}{x+2}\right)\Big\vert_0^1=\pi\left(\frac{5}{2}-6\ln\frac{3}{2}\right)$.	3p 2p
c)	Fie $f:[1;2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$. Cum f '(x) este pozitivă rezultă că f este strict crescătoare pe [1;2]. Din $1\le x\le 2\Rightarrow f(1)\le f(x)\le f(2)\Rightarrow 0\le f(x)\le\frac{1}{4}$. După care se integrează inegalitatea, $0\le\int_1^2 f(x)dx\le\int_1^2\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}$;	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Stan Adrian

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a^2 = 18 - 2\cdot\sqrt{(9+6\sqrt{2})(9-6\sqrt{2})} \Rightarrow$ $a^2 = 12, a\rangle 0 \Rightarrow a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.\quad \left(a - 2\sqrt{3}\right)^2 = 0.$	3p 2p
2.	r =7 $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r \Rightarrow 192 = 3 + (n-1)\cdot 7$ n=28 Rezultă 3 + 10 + 17 +….+ 192 = 2730	1p 2p 2p
3.	Relaţiile lui Viete: $x_1 + x_2 = -4,\ x_1 \cdot x_2 = 1;$ $\frac{x_1 - 1}{x_1 + 2} + \frac{x_2 - 1}{x_2 + 2} = \frac{2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4}{x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} = 2.$	2p 3p
4.	Condiţii de existenţă: $x \in (3;\infty)$. Ecuaţia dată este echivalentă cu $(x-3)(x-1)^2 = (x-2)^3 \Rightarrow$ $x^2 - 5x + 5 = 0.\quad S = \left\{\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right\}.$	1p 2p 2p
5.	$\sin(90^0 + x) = \cos x,\quad \cos(180^0 - x) = -cosx$ $\sin(180^0 - x) = \sin x,\quad \cos(90^0 + x) = -\sin x$ Suma dată este egală cu 0.	2p 2p 1p
6.	Din teorema cosinusului $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos B$ se obţine AC=5 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{3}{5}.$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

www.mateinfo.ro

1. a)	$A(3)\cdot A(-3)=\begin{pmatrix}4&-1&2\\2&6&-1\\2&1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&-1&2\\2&0&-1\\2&1&-2\end{pmatrix}$ $A(3)\cdot A(-3)=\begin{pmatrix}-6&-2&5\\8&-3&0\\6&2&-5\end{pmatrix}$.	3p 2p
b)	Calcul A(x)+A(-x) Calculul determinantului det(A(x)+A(-x))=0	3p 2p
c)	c)Calculul determinantului $x^3+5x^2+6x=0$ $x\in\{-3,-2,0\}$.	2p 2p 1p
2. a)	Se calculează f(2) şi se egalează cu expresia dată în enunţ. f(2)= 8+4m+2n+p = 2(2m+n+9) de unde rezultă că p=10.	2p 3p
b)	Din x^2 +x-2=0 rezultă x_1= - 2 şi x_2 =1. $f(X)\vdots g(X)=(X-1)(X+2)\Leftrightarrow\begin{cases}f(-2)=0\\f(1)=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}4m-2n=-2\\m+n=-11\end{cases}\Rightarrow m=-4,\ n=-7.$	1p 2p 2p
c)	Cum $f(X)=X^3-4X^2-7X+10=(X^2+X-2)(X-5)=$ f(1)=0 aşadar, produsul $=(X+2)(X-1)(X-5)\Rightarrow$ $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(2010)$ îl conţine pe f(1) prin urmare este egal cu zero.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=3x+2x\ln x$. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$.	3p 2p
b)	$f''(x)=5+2\ln x$.	3p

www.mateinfo.ro

	f este convexă pe $\left[\frac{1}{e^2\sqrt{e}},\infty\right)$ și concavă pe $\left(-\infty,\frac{1}{e^2\sqrt{e}}\right]$.	2p
c)	ecuația tangentei în punctul $A(x_0,y_0)$ este $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. $y_0=f(x_0)\Rightarrow y_0=f(1)=1\Rightarrow$ Ecuația dreptei este $y-1=f'(1)(x-1)\Rightarrow y-1=3(x-1)\Rightarrow 3x-y-2=0$	1p 1p 3p
2. a)	Din condițiile de continuitate și derivabilitate a lui f se obține $\begin{cases}a+b=2\\2a+b=-2\end{cases}$. Din rezolvarea sistemului rezultă $a=-4,b=6$.	3p 2p
b)	F(x) este primitiva lui f $\Leftrightarrow F'(x)=f(x)$ F este convexă deoarece $F''(x)=f'(x)=\frac{2}{x-2}\rangle 0,\ \forall x\in(2;\infty)$.	2p 3p
c)	$\int_0^1\frac{1}{-4x^2+6x+2}dx=\int_0^1\frac{1}{-4\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2\right]}dx=$ $=-\frac{1}{2\sqrt{17}}\left[\ln\left\lvert\frac{7-\sqrt{17}}{7+\sqrt{17}}\right\rvert-\ln\left\lvert\frac{3-\sqrt{17}}{3+\sqrt{17}}\right\rvert\right]$.	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Stan Adrian

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$f(1)+f(2)+.....+f(n)=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k-2n$	1p 2p

www.mateinfo.ro

	$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $S = \frac{n(n+1)(n+5)}{3} - 2n$	2p
2.	$a_m - a_n = (m-n)\cdot r$ $\quad a_{26} - a_{18} = (26-18)\cdot r \Leftrightarrow 178-122 = 8r \Rightarrow r = 7$ $a_{18} - a_1 = (18-1)\cdot r \Leftrightarrow 122 - a_1 = 17\cdot 7 \Rightarrow a_1 = 3$. $S_{26} = \frac{(a_1 + a_{26})\cdot n}{2} = \frac{(3+178)\cdot 26}{2} = 181\cdot 13 = 2353$.	1p 2p 2p
3.	Ecuația dată este echivalentă cu $3^x\left(9+1+\frac{1}{9}\right) = 273 \Rightarrow 3^x \cdot \frac{91}{9} = 273 \Rightarrow$ $3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$.	3p 2p
4.	$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \Rightarrow 39 = 9 - 3xy \Rightarrow xy = -10$. Sistemul dat devine $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-10 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(-2;5),(5;-2)\}$.	2p 3p
5.	Mijlocul lui $[BC]$ este $M(1;-5)$ iar panta dreptei AB este 3. Ecuația dreptei AM este $y - y_M = m(x - x_M)$, $3x - y - 8 = 0$.	2p 3p
6.	Se calculează $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{8}$. $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$. Din teorema sinusurilor se obține $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{16\sqrt{7}}{7}$.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(A + I_3) = 2$	2p 3p
b)	A + m I_3 este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A + mI_3) \neq 0$ Calculul determinantului matricei $A + mI_3$ si rezolvarea ecuației $\det(A + mI_3) = 0$	3p 2p

www.mateinfo.ro

	Concluzia, $\det(A+mI_3)\neq 0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}-\{0\}$	
c)	$(A+I_3)^T=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&2\\2&-2&0\end{pmatrix}$ $(A+I_3)^*=\begin{pmatrix}4&4&-2\\-2&-2&2\\2&1&-1\end{pmatrix}$ $X=(A+I_3)^{-1}=\frac{1}{\det(A+I_3)}\cdot(A+I_3)^*$	1p 3p 1p
2. a)	$f(\hat{1})=\hat{2}a+\hat{1}$ $\hat{2}a+\hat{1}=\hat{2}\Rightarrow a=\hat{3}$	2p 3p
b)	$a=\hat{3}\Rightarrow f(x)=x^2+x$ $f(x)=\hat{2}\Leftrightarrow x^2+x=\hat{2}$ $x\in\{\hat{1},\hat{3}\}$	1p 2p 2p
c)	$f\vdots(x+\hat{1})\Leftrightarrow f(-\hat{1})=\hat{0}\Leftrightarrow f(\hat{4})=\hat{0}$ $a=\hat{1}\Rightarrow f(x)=x^2+\hat{4}x+\hat{3}$ $f(\hat{4})=\hat{1}+\hat{1}+\hat{3}=\hat{0}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{-x^2+3x-1}{e^x}$; $f'(0)=-1$.	3p 2p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$ $y=0$ ecuația asimptotei către ∞.	3p 2p
c)	$f''(x)=\frac{x^2-5x+4}{e^x}$	2p

www.mateinfo.ro

	$x^2-5x+4=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=4$. Atunci, $f''(x) \rangle 0, \forall x \in (-\infty;1] \cup [4;\infty)$	3p
2.	f admite primitive pe R $\Leftrightarrow$ f este continuă pe R Se studiază continuitatea în 1:	2p
a)	$\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = f(1) = 0 \Rightarrow$ f este continuă în 1, deci si pe R.	3p
b)	$\int_0^2 f(x)dx = I_1 + I_2$ unde $I_1 = \int_0^1 (e^{x-1}-1)dx = (e^{x-1}-x)\Big\|_0^1 = -\frac{1}{e}$ şi	2p
	$I_2 = \int_1^2 (x^3-1)dx = (\frac{x^4}{4}-x)\Big\|_1^2 = \frac{11}{4}$.	2p
	$\int_0^2 f(x)dx = \frac{11}{4} - \frac{1}{e}$	1p
c)	$g(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = x-1$	2p
	$Vol_{Cg} = \pi \int_1^2 g^2(x)dx = \pi \int_1^2 (x-1)^2 dx =$	1p
	$Vol_{Cg} = \pi \frac{(x-1)^3}{3}\Big\|_1^2 = \frac{\pi}{3}$.	2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Stoica Alina Codruţa

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$2^{x^2+5}=4^{x+2} \Leftrightarrow 2^{x^2+5}=\left(2^2\right)^{x+2} \Leftrightarrow 2^{x^2+5}=2^{2x+4}$	2p
	$x^2+5=2x+4 \Rightarrow x^2-2x+1=0$	2p
	$x=1$	1p
2.	$\begin{cases} x_1+x_2=m+1 \\ x_1x_2=2m \end{cases}$	3p
	$x_1x_2-2x_1-2x_2+2=0$	2p
3.	Condiţii de existenţă : $x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)$ şi $x\in[1;+\infty) \Rightarrow x\in\left[\sqrt{3};+\infty\right)$	2p
	$x^2-3=(x-1)^2 \Rightarrow -3=2x+1$	2p
	$x=2\in\left[\sqrt{3};+\infty\right)$	1p
4.	$2x-1\in\{1,3,5,15\}$	2p
	$x\in\{1,2,3,8\}$	2p
	$p=\frac{1}{4}$	1p
5.	$m_{MN}=-\frac{2}{3}$ şi panta mediatoarei segmentului MN este $\frac{3}{2}$	2p
	Panta paralelei prin P este $\frac{3}{2}$	1p
	Ecuaţia paralelei prin P este $3x-2y+3=0$	2p

www.mateinfo.ro

6.	$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \sin^2 x+\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2=1\Rightarrow \sin^2 x=\frac{1}{25}$	3p
	Deoarece $\sin x<0$ pentru $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ avem $\sin x=-\frac{1}{5}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & 4 & m\end{pmatrix}$	2p
	$\det A=-3m+24$	3p
b)	Pentru m=6 avem $\det A=0$	1p
	Studierea compatibilităţii sistemului: sistem compatibil simplu nedeterminat	2p
	Găsirea soluţiei sistemului: $x=\frac{\alpha}{3}, y=\frac{6-4\alpha}{3}, z=\alpha$ cu $\alpha\in\mathbb{R}$	2p
c)	Pentru $m\neq 6$ avem $\det A\neq 0$	2p
	Aplicarea regulii lui Cramer şi aflarea soluţiei x=0, y=2, z=0.	2p
	Pentru $m=6$ avem $\det A=0$ şi sistemul este compatibil conform punctului b.	1p
2. a)	$x\circ y=2xy-6x-6y+21=2x(y-3)-6y+18+3$	2p
	$=2x(y-3)-6(y-3)+3=$	2p
	$2(x-3)(y-3)+3$	1p
b)	$x\circ x=2x^2-12x+21$	1p
	$2x^2-12x+21=11$	2p
	$x^2-6x+5=0$ cu soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=5$	2p
c)	Arată că $x\circ 3=3,\forall x\in\mathbb{R}$	2p
	Avem $x=1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{8}\circ\sqrt{9}\circ\ldots\circ\sqrt{2014}$	1p
	Operaţia fiind asociativă avem că $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{8}\circ\sqrt{9}\circ\ldots\circ\sqrt{2014}=x\circ\sqrt{9}=x\circ 3=3$	2p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}\underset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ rezultă $y=0$ asimptotă orizontală spre ∞ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{-\infty}{0}=(-\infty)\cdot\dfrac{1}{0_+}=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$ rezultă $x=0$ asimptotă verticală la dreapta	2p 2p 1p
b)	$f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ $f'(x)=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e$ $x=e$ punct de maxim	2p 1p 2p
c)	$e<\pi$, deoarece f este descrescătoare pe $(e,+\infty)$ avem $f(e)>f(\pi)$ $\dfrac{\ln e}{e}>\dfrac{\ln\pi}{\pi}\Rightarrow \pi\ln e>e\ln\pi\Rightarrow \ln(e^{\pi})>\ln(\pi^e)\Rightarrow e^{\pi}>\pi^e$	2p 3p
2. a)	$\int x\sin x\ dx=-x\cos x+\int\cos x\ dx$ $=-x\cos x+\sin x+c$	3p 2p
b)	$\int x^n\sin x\ dx=-x^n\cos x+n\int x^{n-1}\cos x\ dx$ $\int x^{n-1}\cos x\ dx=x^{n-1}\sin x+(n-1)\int x^{n-2}\sin x\ dx$ Finalizare $I_n=-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x+n(n-1)I_{n-2}$	2p 2p 1p
c)	$x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow 0\le\sin x\le 1$ $0\le x^n\sin x\le x^n$	1p 2p 2p

www.mateinfo.ro

	$0 \le \int x^n \sin x \ dx \le \frac{x^{n+1}}{n+1}$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$	

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Stoica Alina Codruța

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2 5-\log_2 3=\log_2\frac{5}{3}$	2p
	$\log_2\frac{5}{3}+\log_2\frac{12}{5}=\log_2 4$	2p
	$\log_2 4=\log_2 2^2=2\log_2 2=2\cdot 1=2$	1p
2.	$T_{k+1}=C_8^k\sqrt{2}^k=C_8^k 2^{\frac{k}{2}}$	2p
		2p
	$\frac{k}{2}\in\mathbb{N}\Rightarrow k\in\{0,2,4,6,8\}$ avem 5 termeni raționali	1p
	Dezvoltarea are 9 termeni, deci 4 termeni vor fi iraționali	
3.	$z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow \bar{z}=a-bi$	1p
	$3a-bi=6+i$	2p
	$a=2,b=-1$	2p
4.	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-1-4+m)^2+(2-4-m)^2}$	2p
	$\sqrt{(m-5)^2+(m+2)^2}=5$	2p
	$m^2-3m+2=0$ cu soluțiile $m_1=1$ și $m_2=2$.	1p
5.	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$	2p
	$\sqrt{(5-m)^2+(2+m)^2}=5$	1p
	$m^2-3m+2=0$ cu soluțiile $m_1=1$ și $m_2=2$	2p

www.mateinfo.ro

6.	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=6^2+4^2-2\cdot 6\cdot 4\cdot\cos 60^\circ$	2p
	$a^2=36+16-48\cdot\frac{1}{2}=28\Rightarrow a=2\sqrt{7}$	1p
	$p=10+2\sqrt{7}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Dacă $x=0$ avem $A(0)=\begin{pmatrix}2014^0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	2p
	$A(0)=I_3\Rightarrow I_3\in G$	3p
b)	Pentru $x,y\in\mathbb{R}$ avem $A(x)A(y)=\begin{pmatrix}2014^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2014^y & 0 & 0\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	3p
	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}2014^{x+y} & 0 & 0\\ 0 & 1 & x+y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in G$, $x+y\in\mathbb{R}$	2p
c)	$A^2(x)=A(x)A(x)=A(2x)=\begin{pmatrix}2014^{2x} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	2p
	$\det A^2(x)=\begin{vmatrix}2014^{2x} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\Rightarrow$	2p
	$2014^{2x}=2014\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$	1p
2.	$x,y\in(3,+\infty)\Rightarrow x-3>0,\ y-3>0$	2p
a)	$x\circ y=xy-3x-3y+12=(x-3)(y-3)+3>3\Rightarrow x\circ y\in(3,+\infty)$	3p
b)	$x\circ x=x\Rightarrow x^2-3x-3x+12=x$	3p
		2p

www.mateinfo.ro

	$\Rightarrow x^2-7x+12=0$ cu soluţiile $x_1=3$ şi $x_1=4$	
c)	Verificăm dacă $f(x+y)=f(x)\circ f(y)$ $f(x+y)=e^{x+y}+3$ $f(x)\circ f(y)=(f(x)-3)(f(y)-3)+3=(e^x+3-3)(e^y+3-3)+3=e^x\cdot e^y+3=e^{x+y}+3$ Fie $x_1,x_2\in R$, din $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow e^{x_1}+3=e^{x_2}+3\Rightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$ deci f injectivă Din $f(x)=y\Rightarrow e^x+3=y\Rightarrow e^x=y-3\Rightarrow x=\ln(y-3)\in R$ pentru $y\in(3,+\infty)$ deci f surjectivă Aşadar f bijectivă Cum f este morfism bijectiv rezultă că f este izomorfism de grupuri.	2p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\cos\frac{1}{x}$ este funcţie mărginită $-1\le\cos\frac{1}{x}\le 1$ $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$ f este continuă	2p 2p 1p
b)	$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ $f'(0)=0$	2p 3p
c)	$a_n=\frac{1}{n^3}\cos n^3+\frac{2}{n^3}\cos\frac{n^3}{2}+\frac{3}{n^3}\cos\frac{n^3}{3}+\ldots+\frac{n}{n^3}\cos\frac{n^3}{n}$ $\lvert a_n\rvert\le\frac{n+1}{2n^2}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$	1p 2p 2p
2. a)	Dacă $F:(0,+\infty)\to R$ este o primitivă a lui $f:(0,+\infty)\to R$ atunci F este derivabilă pe $(0,+\infty)$ şi $F'(x)=f(x),\ \forall x\in(0,+\infty)$ $F'(x)=f(x)=\ln x-x$	1p 1p

www.mateinfo.ro

	$F''(x)=f'(x)=(\ln x-x)'=(\ln x)'-x'=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$	2p
	$\frac{1-x}{x}<0$ pentru $x\in(1,+\infty)$, deci F concavă pe $(1,+\infty)$	1p
b)	$\int(x-f(x)+\ln x)^2dx=\int(x-\ln x+x+\ln x)^2dx=$	2p
	$=\int(2x)^2dx=\int 4x^2dx=$	2p
	$=4\frac{x^3}{3}+C$	1p
c)	$g(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln x-x}{x}=\frac{1}{x}\ln x-1$	1p
	$G(x)=\int g(x)dx=\int\left(\frac{1}{x}\ln x-1\right)dx=\int\frac{1}{x}\ln x\,dx-\int dx=\int(\ln x)'(\ln x)dx-\int dx=\frac{\ln^2 x}{2}-x+C$	2p
	$G(1)=\frac{\ln^2 1}{2}-1+C=-1+C$	1p
	$-1+C=\frac{1}{2}\Rightarrow C=\frac{3}{2}$ deci $G(x)=\frac{\ln^2 x}{2}-x+\frac{3}{2}$	1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Stoica Alina Codruţa

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z^2+z+1=0 \Rightarrow z^3=1$ deci $z^4+\frac{1}{z^4}=z+\frac{1}{z}=\frac{z^2+1}{z}=\frac{-z}{z}=-1$	2p 3p
2.	Avem între rădăcini relaţia $x_2-x_1=3$ şi din relaţiile lui Viete pentru ecuaţia f(x)=0 mai avem $x_2+x_1=-a$ deci $x_2=\frac{3-a}{2}$ care verifică ecuaţia $f(x)=0$ Din ecuaţia $a^2+8a-9=0$ se obţin soluţiile $a=1$ şi $a=-9$.	1p 2p 2p
3.	Condiţii de existenţă $\begin{cases} x+1>0 \\ x>0 \end{cases}$ adică $x\in(0;+\infty)$ Folosind proprietăţile logaritmilor avem $\lg(x+1)x=\lg 90$ rezolvând ecuaţia $x^2+x-90=0$ obţinem soluţia $x=9$.	1p 2p 2p
4.	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{2014}}=2-\frac{1}{2^{2014}}$ $\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{2014}}\right]=1$ $\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{2014}}\right\}=1-\frac{1}{2^{2014}}$	2p 2p 1p
5.	Dacă notăm $\vec{AB}=\vec{u}$ si $\vec{BC}=\vec{v}$ obţinem prin calcul vectorial $\vec{AC}+\vec{BD}=3\vec{v}$ adică $\left\|\vec{AC}+\vec{BD}\right\|=3\left\|\vec{v}\right\|=3\cdot 10=30$	2p 3p

www.mateinfo.ro

6.	$\cos\alpha = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} = \dfrac{-2}{\sqrt{41}\sqrt{13}} < 0$ deci unghiul este obtuz	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Prin calcul direct obţinem $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$	2p 3p
b)	b) Vom avea ecuaţia $\sigma^{2014} \cdot x = e \Rightarrow \sigma \cdot x = e$. cu soluţia $x = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	3p 2p
c)	c) Notăm $\alpha = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_6$ cu o ordonare oarecare a factorilor şi avem $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\sigma_1) \cdot \varepsilon(\sigma_2) \cdot \varepsilon(\sigma_3) \cdot \varepsilon(\sigma_4) \cdot \varepsilon(\sigma_5) \cdot \varepsilon(\sigma_6) = (-1)^{m(\sigma_1)+\varepsilon(\sigma_2)+m(\sigma_3)+m(\sigma_4)+m(\sigma_5)+m(\sigma_6)} = -1$ adica σ este permutare impara.	1p 2p 2p
2. a)	$f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = m$ $f(\hat{2}) = m + \hat{1}$ $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{1} + \hat{3}m = \hat{1}$	1p 2p 2p
b)	$f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{2}$ $f(\hat{2}) = \hat{0} \Rightarrow x_1 = \hat{2}$ $f = (x - \hat{2})(x^2 + x + \hat{2}) = (x + \hat{1})(x^2 + x + \hat{2})$ Verificăm şi că $\hat{2}$ nu este rădăcină dublă	2p 1p 2p
c)	Dacă $m = \hat{2}$ atunci f este reductibil cum am văzut la punctul a)	2p

www.mateinfo.ro

	Dacă $m=\hat{0}$ atunci f este reductibil deoarece $f=x^2\left(x+\hat{2}\right)$ Dacă $m=\hat{1}$ atunci $\begin{matrix} f\left(\hat{0}\right)=f\left(\hat{1}\right)=\hat{1} \\ f\left(\hat{2}\right)=\hat{1}+\hat{1}=\hat{2} \end{matrix}$ adică f ireductibil **peste** $\mathbb{Z}_3[X]$.	1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$ $f'(x)=\left(e^x+x^2\right)'=e^x+2x$ $f'(1)=e^1+2\cdot 1=e+2$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=e+2$	1p 2p 1p 1p
b)	$f''(x)=\left(e^x+2x\right)'=e^x+2$ $f''(x)=e^x+2>0$, $\forall x\in R$ deci f este convexă pe $\mathbb{R}$	3p 2p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x+x^2\right)=\infty+\infty=\infty$ rezultă că f nu are asimptotă orizontală spre ∞ Căutăm asimptotă oblică $y=mx+n$ spre ∞ $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+x^2}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\underset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+2x}{1}=\infty+\infty=\infty$ rezultă că f nu are asimptotă oblică spre ∞	2p 1p 2p
2. a)	$I_1=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx$ $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big\vert_0^1=\frac{\ln 2}{2}$	2p 3p
b)	Pentru $x\in[0,1]\Rightarrow 0\le\frac{x^n}{1+x^{2n}}\le x^n$ Se integrează inegalităţile şi se obţine că $I_n\le\frac{1}{n+1}$ pentru orice n natural nenul.	2p 3p

www.mateinfo.ro

c)	$\lim\limits_{n\to\infty} I_n(\alpha)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}dx \Rightarrow 0\le \frac{x^n}{1+x^{2n}}\le x^n \Rightarrow 0\le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}dx\le \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}$	2p
	pentru $\alpha\in[0;1]$ folosind criteriul cleştelui avem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(\alpha)=0$	1p
	Dacă $\alpha>1$ avem $I_n(\alpha)=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}dx+\int_1^\alpha \frac{x^n}{1+x^{2n}}dx$	
	Fie c$\in(1,\ \alpha)$ avem $\int_1^\alpha \frac{x^n}{1+x^{2n}}dx=F(\alpha)-F(1)=(\alpha-1)\frac{c^n}{1+c^{2n}}$	2p
	$\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha-1)\frac{c^n}{1+c^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha-1)\frac{1}{\frac{1}{c^n}+c^n}=0$	

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 1

Prof: Szép Gyuszi

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{2+3i}{1+i}=\frac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-2i+3i-3i^2}{1-i^2}=\frac{5+i}{2}$	3p
	$\frac{2+3i}{1+i}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i\Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{2+3i}{1+i}\right)=\frac{5}{2}.$	2p
2.	Știm că, în ipoteza $a<0$, funcția $f(\mathrm{x})=\mathrm{ax}^2+bx+c$ are valoarea maximă $f_{\max}=-\frac{\Delta}{4a}$.	1p
	În cazul nostru, $\Delta=3^2-4\cdot(-1)\cdot 1=13$. Atunci $-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{13}{4\cdot(-1)}=\frac{13}{4}$.	2p
	Prin urmare, $f_{\max}=\frac{13}{4}$.	2p
3.	Încercăm să încadrăm numărul $\log_3 534$ între două numere naturale consecutive.	1p
	Avem $3^5<534<3^6$ și, ținând cont de faptul că funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(\mathrm{x})=\log_3 x$ este strict crescătoare, putem afirma că $\log_3 3^5<\log_3 534<\log_3 3^6$, adică $5<\log_3 534<6$.	2p
	Atunci $\left[\log_3 534\right]=5$.	2p
4.	Există 90 numere naturale cu două cifre, și anume cele de la 10 până la 99. Prin urmare, avem 90 cazuri posibile.	2p
	Cazurile favorabile sunt numerele naturale pentru care cifra zecilor este cu 2 mai mare decât cifra unităților, adică numerele $20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97$. Prin urmare, avem 8 cazuri posibile.	2p
	Probabilitatea este $P=\frac{8}{90}=\frac{4}{45}$.	1p
5.	Punctul $A(-1,2)$ aparține dreptei dacă $2=-a+b$ (am înlocuit $x=-1$ și $y=2$ în relația $y=ax+b$).	2p
	Punctul $B(0,3)$ aparține dreptei dacă $3=b$ (am înlocuit $x=0$ și $y=3$ în relația $y=ax+b$).	2p
	Din $2=-a+b$ și $3=b$ obținem $a=1$. Așadar, $a=1$ și $b=3$.	1p
6.	Știm că $\sin(2k\pi+x)=\sin x$ și $\cos(2k\pi+x)=\cos x$, pentru orice $k\in\mathbb{Z}$, $x\in\mathbb{R}$.	1p
	Avem $\sin(2014\pi)=\sin 0=0$ și $\cos(2013\pi)=\cos(2012\pi+\pi)=\cos\pi=-1$.	3p
	Deci $\cos^2(2013\pi)+\sin(2014\pi)=(-1)^2+0=1$.	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Elementul 1 din a doua linie a permutării σ are la stânga lui un singur element mai mare decât el (pe 2). Elementul 2 nu are la stânga lui elemente mai mari decât el. Elementul 3 are la stânga lui un singur element mai mare decât el (pe 4). Elementul 4 nu are la stânga lui elemente mai mari decât el. Deci numărul de inversiuni este $m(\sigma)=1+0+1+0=2$.	3p
	Signatura permutării este $\epsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}=(-1)^2=1$, de unde rezultă că permutarea σ este pară.	2p

www.mateinfo.ro

b)	$\tau^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$.	1p
	$\tau^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$.	1p
	$\tau^4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=e$.	1p
	Avem $A=\{\tau,\tau^2,\tau^3,e\}$. Prin urmare, mulțimea A are patru elemente.	2p
c)	Din $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$ rezultă că $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$.	2p
	Avem $x=\tau\sigma^{-1}$, adică $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$.	2p
	Prin urmare, $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$.	1p
2.	Evident, 1 și 2 sunt numere raționale.	1p
a)	Avem că $2^2-3\cdot1=4-3=1$.	2p
	Așadar, $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\in H$.	2p
b)	Trebuie să arătăm că pentru orice elemente $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}\in H$, avem că $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}\in H$.	1p
	Din $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}\in H$ rezultă că $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$, iar $a^2-3b^2=1$ și $c^2-3d^2=1$.	1p
	Avem $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac+3bd&3(ad+bc)\\ad+bc&ac+3bd\end{pmatrix}$.	1p
	Cum $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$, rezultă că $ac+3bd,ad+bc\in\mathbb{Q}$.	
	În plus, $(ac+3bd)^2-3\cdot(ad+bc)^2=a^2c^2+6abcd+9b^2d^2-3a^2d^2-6abcd-3b^2c^2=$ $a^2c^2-3a^2d^2-3b^2c^2+9b^2d^2=a^2(c^2-3d^2)-3b^2(c^2-3d^2)=(a^2-3b^2)(c^2-3d^2)=1\cdot1=1$.	1p
	Am arătat astfel că $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}\in H$. În concluzie, mulțimea H este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulțirea matricelor.	1p
c)	Fie $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}\in H$. Avem $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac+3bd&3(ad+bc)\\ad+bc&ac+3bd\end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ca+3db&3(da+cb)\\ad+cb&ca+3db\end{pmatrix}$. Cum înmulțirea numerelor raționale este comutativă, rezultă că $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}$, adică înmulțirea este comutativă pe H.	1p

www.mateinfo.ro

	Știm că înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ este asociativă. Cum mulțimea H este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulțirea matricelor, va rezulta că „$\cdot$” este asociativă pe H. Matricea $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in H$ este element neutru, adică pentru orice element $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\in H$, avem $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}$. Fie $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\in H$. Avem $\begin{vmatrix}a&3b\\b&a\end{vmatrix}=a^2-3b^2=1\neq 0$, de unde rezultă că matricea $\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}$ este inversabilă. Prin urmare, $(H,\cdot)$ este grup abelian.	1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}\right)'=\dfrac{x'\cdot\sqrt{x^2+x+2}-x\cdot\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^2}=$ $=\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-x\cdot\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}}{x^2+x+2}=\dfrac{2(x^2+x+2)-x(2x+1)}{2(x^2+x+2)\sqrt{x^2+x+2}}=\dfrac{x+4}{2(x^2+x+2)\sqrt{x^2+x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.	2p 3p
b)	Avem $x^2+x+2=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Atunci $2\left(x^2+x+2\right)\sqrt{x^2+x+2}>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Semnul funcției f' este dat de semnul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+4$. Așadar, funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,-4]$ și crescătoare pe intervalul $[-4,+\infty)$.	2p 1p 2p
c)	Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, deoarece se obține din operații cu funcții continue. Avem $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=-1$ și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=1$. Conform subpunctului b), funcția f are un punct de minim $x=-4$. Obținem $f_{\min}=-\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$. Atunci $\text{Im}(f)=\left[-\dfrac{2\sqrt{14}}{7},1\right)$.	1p 1p 1p 2p
2. a)	$-x+3-\dfrac{x}{x^2+9}=\dfrac{(-x+3)(x^2+9)}{x^2+9}-\dfrac{x}{x^2+9}=$ $=\dfrac{-x^3-9x+3x^2+27-x}{x^2+9}=$	2p 2p

www.mateinfo.ro

	$\frac{-x^3+3x^2-10x+27}{x^2+9}=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.	1p
b)	$\int_1^9 (x-3+f(x))^2\,dx=\int_1^9\left(x-3-x+3-\frac{x}{x^2+9}\right)^2 dx=\int_1^9\frac{x^2}{(x^2+9)^2}dx=$	2p
	$=-\frac{1}{2}\int_1^9 x\cdot\left(\frac{x}{x^2+9}\right)' dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+9}\Big\vert_1^9+\frac{1}{2}\int_1^9\frac{1}{x^2+9}dx=$	2p
	$-\frac{1}{2}\left(\frac{9}{90}-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Big\vert_1^9=\frac{1}{6}\left(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$.	1p
c)	Facem schimbarea de variabilă $x=f(t)$. Atunci $dx=f'(t)\,dt$.	1p
	Atunci $\int_{\frac{19}{10}}^3 f^{-1}(x)\,dx=\int_1^0 t\cdot f'(t)\,dt=-\int_0^1 t\cdot f'(t)\,dt=$	1p
	$=-t\cdot f(t)\vert_0^1+\int_0^1 f(t)\,dt=-f(1)+\int_0^1\left(-t+3-\frac{t}{t^2+9}\right)dt=-\frac{19}{10}-\frac{t^2}{2}\Big\vert_0^1+3t\Big\vert_0^1-\frac{1}{2}\ln(t^2+9)\Big\vert_0^1=$	2p
	$=-\frac{19}{10}-\frac{1}{2}+3-\frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}$.	1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 2

Prof: Szép Gyuszi

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Avem că $2x-3=3i$ sau $2x-3=-3i$, iar de aici obținem soluțiile $x_1=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$ și $x_2=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$.	3p 2p
2.	Vârful unei parabole $y=ax^2+bx+c$ este $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$. În cazul nostru, $\Delta=4(3m+1)^2-4m=4(9\,\mathrm{m}^2+5m+1)=36\left(\mathrm{m}^2+\frac{5}{9}m+\frac{1}{9}\right)=36\left[\left(m+\frac{5}{18}\right)^2+\frac{11}{324}\right]>0$, pentru orice $m\in\mathbb{R}$. Atunci $-\frac{\Delta}{4a}=-9\left[\left(m+\frac{5}{18}\right)^2+\frac{11}{324}\right]<0$, pentru orice $m\in\mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că vârful parabolei se află sub axa Ox pentru orice $m\in\mathbb{R}$.	1p 2p 2p
3.	Pentru existența expresiei $\log_2\sqrt{x+3}$ impunem condiția $x+3>0$, adică $x\in(-3,+\infty)$. Ecuația dată, pentru $x\in(-3,+\infty)$, este echivalentă cu ecuația $\sqrt{x+3}=2$. Ridicând la pătrat, obținem $x+3=4$, de unde rezultă că $x=1\in(-3,+\infty)$ este soluția ecuației date.	1p 2p 1p 1p
4.	Termenul general este $T_{k+1}=\mathrm{C}_7^k\,x^{7-k}\left(\frac{2}{x}\right)^k=\mathrm{C}_7^k\,2^k\,x^{7-2k}$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,7\}$. Trebuie să avem $7-2k=3$, de unde se obține $k=2$. Termenul care conține pe x^3 este $T_3=T_{2+1}=\mathrm{C}_7^2\,2^2\,x^3=84x^3$.	3p 1p 1p
5.	$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}$, iar de aici rezultă că $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}$.	3p 2p
6.	Aplicăm formula fundamentală a trigonometriei: $\sin^2 a+\cos^2 a=1$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$. Știind că $\sin a=\frac{3}{5}$, avem $\cos^2 a=1-\frac{9}{25}$. În cadranul II, funcția cosinus este negativă. De aceea, din $\cos^2 a=\frac{16}{25}$ va rezulta $\cos a=-\frac{4}{5}$. Avem $\mathrm{tg}\,a=\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{3}{4}$.	1p 1p 2p 1p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Matricea M este inversabilă dacă și numai dacă $\det(M)\neq 0$.	1p
	Avem $\det(M)=\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ m-1 & 3 & 1 \\ 2+m & 2-m & 1 \end{vmatrix}=3m+4+2m-m^2+m+2m-2-6-3m+m^2-2m-2m+2=m-2$	3p
	Din $\det(M)\neq 0$ deducem că $m\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.	1p
b)	Avem $\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ m-1 & 3 & 1 \\ 2m & 2-m & 1 \end{vmatrix}=3m+4m+2m-m^2-2+m-6m-2m+m^2-2m+2=0$.	3p
	Cum $\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ m-1 & 3 & 1 \\ 2m & 2-m & 1 \end{vmatrix}=0$, rezultă că punctele A, B și C sunt coliniare.	2p
c)	Am văzut la punctul a) că $\det(M)=m-2$.	1p
	Dacă $m\neq 2$, atunci $\operatorname{rang}(M)=3$.	1p
	În cazul în care $m=2$, avem $\det(M)=0$. Cum $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2-3=-1\neq 0$, va rezulta că $\operatorname{rang}(M)=2$.	2p
	Așadar, $\operatorname{rang}(M)\geq 2$, pentru orice $m\in\mathbb{R}$.	1p
2. a)	Avem $\hat{0}+\hat{1}+\cdots+\widehat{14}=\hat{0}+(\hat{1}+\widehat{14})+(\hat{2}+\widehat{13})+\cdots+(\hat{7}+\hat{8})=$	3p
	$\hat{0}+\hat{0}+\hat{0}+\hat{0}+\hat{0}+\hat{0}+\hat{0}+\hat{0}=\hat{0}$.	2p
b)	$\hat{2}\cdot\hat{k}\neq\hat{6}$, pentru orice $\hat{k}\in\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{14}\}\setminus\{\hat{3}\}$ și $\hat{2}\cdot\hat{3}=\hat{6}$.	3p
	Prin urmare, ecuația $\hat{2}\cdot x=\hat{6}$ are în $\mathbb{Z}_{15}$ soluția $x=\hat{3}$.	2p
c)	Un element $\hat{k}\in\mathbb{Z}_{15}$ este inversabil dacă și numai dacă numerele naturale k și 15 sunt prime între ele.	3p
	Elementele neinversabile sunt acele elemente $\hat{k}\in\mathbb{Z}_{15}$ pentru care k are un divizor comun netrivial cu 15, adică $\hat{0},\hat{3},\hat{5},\hat{6},\hat{9},\widehat{10},\widehat{12}$. Astfel am demonstrat că sunt 7 elemente neinversabile ale inelului $\mathbb{Z}_{15}$.	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-7x^2+11x-5}}{x-1}=$	2p
	$=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^2(x-5)}{(x-1)^3}}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\sqrt[3]{\dfrac{x-5}{x-1}}=+\infty$	3p
b)	Calculând formal, obținem:	3p

www.mateinfo.ro

	$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^3-7x^2+11x-5}\right)'=\frac{\left(x^3-7x^2+11x-5\right)'}{3\sqrt[3]{\left(x^3-7x^2+11x-5\right)^2}}=\frac{3x-11}{3\sqrt[3]{(x-1)(x-5)^2}}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$. Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$. Pe de altă parte, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to 5} f'(x)=+\infty$. Conform teoremei reciproce a teoremei lui Lagrange, rezultă că funcția f nu este derivabilă în $x=1$ și în $x=5$. Prin urmare, domeniul de derivabilitate este $\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$.	2p
c)	Avem că $\sqrt[3]{(x-1)^4(x-5)^2}>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$. Semnul derivatei f' este dat de funcția $g:\mathbb{R}\setminus\{1;5\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x^2-14x+11$. Putem astfel să întocmim următorul tabel de monotonie:	2p
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ 1 $\frac{11}{3}$ 5 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+ + + + + + 0 - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + +</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↗ 0 ↘ $-\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$ ↗ 0 ↗</td></tr></table>	2p 1p
	Punctul $x=\frac{11}{3}$ este punct de minim local. Punctul $x=1$ este punct de maxim local.	
2. a)	Funcția $x\mapsto\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ este continuă pe intervalul $[1,2]$. Prin urmare, există $I_2=\int_1^2\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$.	2p
	Avem $I_2=\int_1^2\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)'dx=-e^{\frac{1}{x}}\Big\|_1^2=e-\sqrt{e}$.	3p
b)	Vom aplica metoda integrării prin părți. Fie $n\in\mathbb{N}$.	1p
	$I_{n+1}=\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}dx=\int_1^2\left(-\frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)dx=\int_1^2\left(-\frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'dx=$	3p
	$=-\frac{1}{x^{n-1}}e^{\frac{1}{x}}\Big\|_1^2-(n-1)\int_1^2\frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}dx=-\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}}+e-(n-1)I_n$	
	Deci $I_{n+1}=e-\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}}+(1-n)I_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.	1p
c)	Folosind monotonia integralei, din relația $0\leq\frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\leq\frac{e}{x^n}$, $(\forall)x\in[1,2]$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ rezultă	2p
	$\int_1^2 0\,dx\leq\int_1^2\frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}dx\leq\int_1^2\frac{e}{x^n}dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.	2p

www.mateinfo.ro

	Avem $\int_1^2 0\,\mathrm{d}x = 0$, $\int_1^2 \frac{1}{x^n} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = I_n$ și $\int_1^2 \frac{\mathrm{e}}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \le \frac{\mathrm{e}}{n-1}$, $(\forall)\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Am obținut că $0 \le I_n \le \frac{\mathrm{e}}{n-1}$, $(\forall)\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Trecând la limită, avem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.	1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 3

Prof: Szép Gyuszi

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Avem $b_4 = b_2 \cdot q^2$, de unde rezultă că $q^2 = \frac{b_4}{b_2} = \sqrt{\frac{243}{27}} = 3$. Acum putem scrie că $b_{10} = b_4 \cdot q^6 = \sqrt{243} \cdot 3^3 = 243\sqrt{3}$.	3p 2p
2.	$f(\mathrm{x}) = 2^{x^2-4x+3} = 2^{(x-1)(x-3)}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci $f(1) = 2^{(1-1)(1-3)} = 2^0 = 1$ și $f(3) = 2^{(3-1)(3-3)} = 2^0 = 1$. Am găsit că $f(1) = f(3)$, ceea ce ne demonstrează că funcția f nu este injectivă.	2p 2p 1p
3.	Ecuația dată se mai poate scrie sub forma $3^x - 3^x \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^x \cdot 3^2 = 32$. Dând factor comun se obține $3^x \left(1 - 3^1 + 2 \cdot 3^2\right) = 32$, adică $3^x \cdot 16 = 32$. Din $3^x = 2$ se obține soluția $x = \log_3 2$.	1p 3p 1p
4.	Putem avea trei situații: $f(1) = \mathrm{f}(2) = 4$, $f(1) = \mathrm{f}(2) = 5$, respectiv $f(1) = 4$ și $f(2) = 5$. Așadar, există trei funcții cu proprietatea că $f(1) \le f(2)$.	4p 1p
5.	Determinăm mai întâi coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$. Avem $\overrightarrow{AB} = (-1-2)\vec{i} + (4-3)\vec{j}$, de unde rezultă că $\overrightarrow{AB}(-3,1)$. Ecuația dreptei care trece prin punctul $C(1,-2)$ și are direcția vectorului $\overrightarrow{AB}$ este: $d : \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{1}$, adică $d : x + 3y + 5 = 0$.	2p 3p
6.	Folosim formulele $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x}$ și $\mathrm{tg}\left(a+b\right) = \frac{\mathrm{tg}\, a + \mathrm{tg}\, \mathrm{b}}{1 - \mathrm{tg}\, a \cdot \mathrm{tg}\, b}$. Atunci ecuația dată se poate rescrie $\frac{\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, \pi}{1 - \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, \pi} = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x}$, adică $\mathrm{tg}^2 x = 1$. Obținem astfel că $\mathrm{tg}\, x = 1$ sau $\mathrm{tg}\, x = -1$. Ținând cont de faptul că $x \in [0, 3\pi]$, obținem $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}\right\}$.	1p 2p 1p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1-a & 1-a \\ 1 & 0 & b-1 \end{vmatrix} =$ $= \begin{vmatrix} 1-a & 1-a \\ 0 & b-1 \end{vmatrix} = (1-a)(\mathrm{b}-1)$.	3p 2p

www.mateinfo.ro

b)	Dacă $a=0$ și $b=2$, atunci sistemul devine $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=-1 \\ x+y+2z=-1 \end{cases}$.	1p
	Din prima ecuație și a doua ecuație ale sistemului obținem $x-1=0$, adică $x=1$.	2p
	Cu a doua ecuație și a treia ecuație ale sistemului se obține $\begin{cases} y+z=-1 \\ y+2z=-2 \end{cases}$. Folosind metoda eliminării, rezultă că $y=0$ și $z=-1$.	2p
c)	Dacă $b=1$, sistemul de ecuații devine $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+y+z=a-1 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$.	2p
	Observăm că prima ecuație și a treia ecuație ale sistemului duc la egalitatea $0=-1$, de unde rezultă că sistemul este incompatibil.	3p
2. a)	$\begin{array}{rrrrr\|l} 8X^4 & +2X^3 & -13X^2 & +7X & -1 & X^2+X-1 \\ \cline{6-6} -8X^4 & -8X^3 & +8X^2 & & & 8X^2-6X+1 \\ \cline{1-3} / & -6X^3 & -5X^2 & +7X & -1 & \\ & 6X^3 & +6X^2 & -6X & & \\ \cline{2-4} & / & X^2 & +X & -1 & \\ & & -X^2 & -X & +1 & \\ \cline{3-5} & & / & / & / & \end{array}$	4p
	Deoarece am obținut restul $r=0$, rezultă că $f \vdots \left(X^2+X-1\right)$.	1p
b)	Avem $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4}$.	2p
	Din relațiile lui Viète obținem $x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3=-\frac{7}{8}$ și $x_1x_2x_3x_4=-\frac{1}{8}$.	2p
	Atunci $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=-\frac{7}{8}\cdot\left(-\frac{8}{1}\right)=7$.	1p
c)	Conform subpunctului a), avem că $f=\left(X^2+X-1\right)\left(8X^2-6X+1\right)$.	1p
	Ecuația $f(x)=0$ se reduce la rezolvarea a două ecuații de gradul doi: $x^2+x-1=0$, respectiv $8x^2-6x+1=0$.	1p
	Ecuația $x^2+x-1=0$ are discriminantul negativ și va avea ca soluții două numere complexe conjugate.	1p
	Discriminantul ecuației $8x^2-6x+1=0$ este $\Delta=4$. Obținem soluțiile $x_1=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ și $x_2=\frac{1}{4}\notin\mathbb{Z}$.	1p
	În concluzie, polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Vom folosi metoda inducției matematice. Avem $a_1=\frac{1}{2}\in(0,1)$ și etapa de verificare este parcursă.	1p
	Presupunem că $a_k\in(0,1)$, unde $k\in\mathbb{N}^*$. Să arătăm că $a_{k+1}\in(0,1)$.	

www.mateinfo.ro

	$a_k \in (0,1) \Rightarrow a_k^2 \in (0,1) \Rightarrow a_k^2+1 \in (0,2) \Rightarrow a_k\left(a_k^2+1\right) \in (0,2) \Rightarrow \frac{a_k\left(a_k^2+1\right)}{2} \in (0,1) \Rightarrow a_{k+1} \in (0,1)$.	1p
	Deci $a_n \in (0,1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.	2p 1p
b)	Cum $a_n \in (0,1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit.	1p
	Pentru studiul monotoniei, din $a_{n+1} = \frac{a_n\left(a_n^2+1\right)}{2}$ rezultă că $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n^2+1}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.	2p
	Însă $a_n^2+1 \in (0,2)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, va rezulta că $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare,	2p
	șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător. Fiind monoton și mărginit, șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.	
c)	Fie $L \in [0,1]$ limita șirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Având în vedere relația de recurență, putem afirma că	1p
	$L = \frac{L(L^2+1)}{2}$, adică $L(L^2-1)=0$. Cum șirul este descrescător, va rezulta că $L=0$.	1p
	Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^2+1}{2} = \frac{1}{2}$.	2p
	Așadar, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.	1p
2. a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (x+1)e^x = 1 = f(0)$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cos x = 1$.	2p
	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0)$, rezultă că funcția f este continuă în punctul $x_0 = 0$.	1p
	Funcția f este continuă pe $(-\infty, 0)$ deoarece este egală cu produsul a două funcții continue (funcția de gradul întâi și funcția exponențială). Funcția f este continuă pe $(0, +\infty)$ deoarece este restricție a funcției cosinus.	1p
	Am arătat că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$. Prin urmare, funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.	1p
b)	Din teorema de existență a primitivelor, funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ este o primitivă a	1p
	funcției f.	
	Avem $\int_0^x (t+1)e^t\,dt = (t+1)e^t\Big|_0^x - \int_0^x e^t\,dt = xe^x$ și $\int_0^x \cos t\,dt = \sin t\Big|_0^x = \sin x$.	3p
	O primitivă a funcției f este $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} xe^x, & x \le 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$.	1p
c)	$V = \pi\int_{\pi/3}^{\pi/2} f(x)\,dx = \pi\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx =$	2p
	$= \pi\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos x(\sin x)'\,dx = \pi\cos x\sin x\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} + \pi\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^2 x\,dx =$	
	$-\frac{\pi\sqrt{3}}{4} + \pi x\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} - \pi\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = -\frac{\pi\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi^2}{6} - \pi\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$	

www.mateinfo.ro

	Atunci $V=\frac{\pi(2\pi-3\sqrt{3})}{24}$.	1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 4

Prof: Szép Gyuszi

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\alpha\in\mathbb{C}$ este soluție a ecuației $mz^2+nz+p=0$, unde m, n, $p\in\mathbb{C}$, dacă $m\alpha^2+n\alpha+p=0$.	1p
	Avem $\left(2-i\sqrt{3}\right)^2=4-4i\sqrt{3}+3i^2=1-4i\sqrt{3}$.	2p
	Atunci $\left(2-i\sqrt{3}\right)^2-4\left(2-i\sqrt{3}\right)+7=1-4i\sqrt{3}-8+4i\sqrt{3}+7=0$.	1p
	Prin urmare, $2-i\sqrt{3}$ este soluție a ecuației $z^2-4z+7=0$.	1p
2.	Deoarece $x\in[3;9]$, rezultă că $\lvert x-3\rvert=x-3$.	1p
	Avem $\lvert x-5\rvert=\begin{cases}x-5, & x\geq 5\\ 5-x, & x<5\end{cases}$.	1p
	Atunci $f:[3;9]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2, & 3\leq x<5\\ 2x-8, & 5\leq x\leq 9\end{cases}$.	1p
	Funcția $g:[5;9]\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-8$ este strict crescătoare. Prin urmare, $f_{\max}=2\cdot 9-8=10$. Cum $f_{\min}=2$, rezultă că $f_{\max}+f_{min}=10+2=12$.	2p
3.	Avem $2x^2+x+4=2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\right]>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că expresia $\sqrt{2x^2+x+4}$ are sens pentru orice $x\in\mathbb{R}$.	2p
	Impunem condiția ca $8-x\geq 0$, adică $x\in(-\infty,8]$.	
	Prin ridicare la pătrat, din $\sqrt{2x^2+x+4}=8-x$ obținem ecuația $x^2+17x-60=0$.	1p
	Discriminantul ecuației este $\Delta=529$. Soluțiile ecuației $x^2+17x-60=0$ sunt $x_1=3$ și $x_2=-20$.	1p
	Cum $-20\notin(-\infty,8]$, rezultă că ecuația $\sqrt{2x^2+x+4}=8-x$ are soluția $x=3$.	1p
4.	Numărul funcțiilor $f:A\to B$ este egal cu $3^4=81$.	2p
	Există $3^4-C_3^1 2^4+C_3^2 1^4=36$ funcții surjective.	2p
	Probabilitatea cerută este $P=\frac{36}{81}$.	1p
5.	Distanța dintre punctele $A(2m+1,2)$ și $B(2,2m)$ este $AB=\sqrt{(2m+1-2)^2+(2-2m)^2}=$ $=\sqrt{8m^2-12m+5}$.	2p
	Avem de rezolvat ecuația irațională $\sqrt{8m^2-12m+5}=5$.	
	Expresia $\sqrt{8m^2-12m+5}$ are sens pentru orice $m\in\mathbb{R}$, deoarece $8m^2-12m+5=8\left[\left(m-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{16}\right]>0$, pentru orice $m\in\mathbb{R}$.	1p

www.mateinfo.ro

	Prin ridicare la pătrat, ecuația $\sqrt{8m^2-12m+5}=5$ devine $2m^2-3m-5=0$. Soluțiile acestei ecuații sunt $m_1=-1$ și $m_2=\frac{5}{2}$.	2p
6.	Notăm cu R raza cercului circumscris triunghiului ABC și vom folosi formula $R=\frac{AB\cdot AC\cdot BC}{4\cdot \mathcal{A}_{ABC}}$. Semiperimetrul triunghiului ABC este $p=\frac{8+8+10}{2}=13$. Folosind formula lui Heron, $\mathcal{A}_{ABC}=\sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}$, obținem $\mathcal{A}_{ABC}=5\sqrt{39}$. Atunci $R=\frac{8\cdot 8\cdot 10}{4\cdot 5\sqrt{39}}=\frac{32\sqrt{39}}{39}$.	1p 1p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Pentru $m=0\in\mathbb{R}$ se obține $A(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3^0\end{pmatrix}$. Avem $I_3=A(0)\in M$.	3p 2p
b)	Fie m, $n\in\mathbb{R}$. Avem $A(\mathrm{m})\cdot A(n)=\begin{pmatrix}1&m&0\\0&1&0\\0&0&3^m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&n&0\\0&1&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&m+n&0\\0&1&0\\0&0&3^{m+n}\end{pmatrix}=A(\mathrm{m+n})$.	5p
c)	$A(1)+\mathrm{A}(2)+\cdots+A(2014)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&3^1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&3^2\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}1&2014&0\\0&1&0\\0&0&3^{2014}\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}1+2+\cdots+2014&1+2+\cdots+2014&0\\0&1+2+\cdots+2014&0\\0&0&3^1+3^2+\cdots+3^{2014}\end{pmatrix}$. Cum $1+2+\cdots+2014=1007\cdot 2015$ și $3^1+3^2+\cdots+3^{2014}=\frac{3^{2015}-3}{2}$, rezultă că $A(1)+\mathrm{A}(2)+\cdots+A(2014)==\begin{pmatrix}1007\cdot 2015&1007\cdot 2015&0\\0&1007\cdot 2015&0\\0&0&\frac{3^{2015}-3}{2}\end{pmatrix}$.	1p 2p 2p
2. a)	$e\in\mathbb{Z}$ este element neutru pentru legea de compoziție „$\circ$” dacă $x\circ e=e\circ x=x$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}$. Avem $x\circ e=x,\forall x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow xe-2x-2e+6=x,\forall x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow (\mathrm{x}-2)(\mathrm{e}-3)=0,\forall x\in\mathbb{Z}$. De aici deducem că $e=3$. Cum $3\circ x=3x-6-2x+6=x,\forall x\in\mathbb{Z}$, rezultă că $e=3$ este element neutru.	1p 2p 2p
b)	$x^2\star(x-1)=0\Leftrightarrow x^2+x-1-1=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0$. Discriminantul ecuației $x^2+x-2=0$ este $\Delta=9$. Soluțiile sunt $x_1=-2\in\mathbb{Z}$ și $x_2=1\in\mathbb{Z}$.	3p 2p

www.mateinfo.ro

c)	Elementul neutru al legii de compoziție „$\star$” este 2. Într-adevăr, $x\star 2=x+2-2=x$ și $2\star x=2+x-2=x$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}$. Fie a, $b\in\mathbb{Z}$ pentru care $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=ax+b$ este un izomorfism de inele. Atunci f trimite elementele neutre ale inelului $(\mathbb{Z},\star,\circ)$ în elementele neutre ale inelului $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, adică $\begin{cases}f(2)=0\\f(3)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=0\\3a+b=1\end{cases}$. Obținem $a=1$ și $b=-2$. Izomorfismul este în mod necesar de forma $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=x-2$. Arătăm că funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=x-2$ este izomorfism de inele. Avem $f(x\star y)=x+y-2-2=x-2+y-2=f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{Z}$ și $f(x\circ y)=xy-2x-2y+4=x(y-2)-2(y-2)=(x-2)(y-2)=f(x)\cdot f(y),\forall x,y\in\mathbb{Z}$. Prin urmare, f este un morfism de inele. Arătăm acum că funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=x-2$ este bijectivă. Fie $y\in\mathbb{Z}$. Avem $f(x)=y\Leftrightarrow x-2=y\Leftrightarrow x=y+2\in\mathbb{Z}$, adică ecuația $f(x)=y$ are soluție unică. Prin urmare, funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=x-2$ este bijectivă.	1p 2p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Fie $x\in\mathbb{R}$. Cum $e^x>0,\forall x\in\mathbb{R}$, avem în particular că $e^x+1\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Prin urmare, funcția f este bine definită. Știm că $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$. Atunci $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x+1}+x+2\right)=-\infty$. Știm că $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. Atunci $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x+1}+x+2\right)=+\infty$.	1p 2p 2p
b)	Avem $e^x+1\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Funcția $x\mapsto\frac{1}{e^x+1}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ fiind egală cu raportul a două funcții derivabile (funcțiile $x\mapsto 1$ și $x\mapsto e^x+1$). Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca sumă de două funcții derivabile, anume funcțiile $x\mapsto\frac{1}{e^x+1}$ și $x\mapsto x+2$. Avem $f'(x)=\left(\frac{1}{e^x+1}+x+2\right)'=\frac{1'\cdot(e^x+1)-1\cdot(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}+1+0=\frac{e^{2x}+e^x+1}{(e^x+1)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Cum $e^x>0,\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că $f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$, de unde deducem că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.	1p 1p 2p 1p
c)	Punctul $P(a,b)$ este centru de simetrie al graficului funcției f dacă și numai dacă $f(x)+f(2a-x)=2b$, pentru orice element x din domeniul de definiție al funcției f. În cazul acestei probleme, trebuie să arătăm că $f(x)+f(-x)=5$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Într-adevăr, $f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1}+x+2+\frac{1}{e^{-x}+1}-x+2=\frac{1}{e^x+1}+\frac{e^x}{e^x+1}+4=5$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.	1p 2p 2p
2. a)	Funcția f este continuă pe $[0,+\infty)$ ca produs de funcții continue. Atunci funcția F este derivabilă pe $[0,+\infty)$ și $F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.	2p

www.mateinfo.ro

	Pentru orice $x\in[0,+\infty)$, avem $\frac{x}{6}\geq 0$ și $e^{-\frac{x}{3}}>0$.	2p
	Deducem astfel că $F'(x)=\frac{x}{6}\cdot e^{-\frac{x}{3}}\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, egalitatea având loc doar pentru $x=0$. Prin urmare, funcția F este strict crescătoare pe $[0,+\infty)$.	1p
b)	Fie $x\in[0,+\infty)$.	
	$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \frac{t}{6}e^{-\frac{t}{3}}dt=-\frac{1}{2}\int_0^x t\left(e^{-\frac{t}{3}}\right)'dt=$	3p
	$-\frac{1}{2}te^{-\frac{t}{3}}\Big\|_{t=0}^{t=x}-\frac{3}{2}e^{-\frac{t}{3}}\Big\|_{t=0}^{t=x}=\frac{1}{2}\left(3-xe^{-\frac{x}{3}}-3e^{-\frac{x}{3}}\right)$.	2p
c)	Avem $\lim_{x\to+\infty}xe^{-\frac{x}{3}}\overset{(0\cdot\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{x}{3}}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{e^{\frac{x}{3}}}=0$ și $\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{x}{3}}=0$.	2p
	Atunci $\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(3-xe^{-\frac{x}{3}}-3e^{-\frac{x}{3}}\right)=\frac{3}{2}$. În plus, $F(0)=0$.	1p
	Am văzut la subpunctele anterioare că funcția F este continuă și strict crescătoare pe $[0,+\infty)$. Așadar, ecuația $F(x)=k$ are soluție unică în intervalul $[0,+\infty)$, pentru orice $k\in\left[F(0),\lim_{x\to+\infty}F(x)\right)$. Ținând cont de faptul că $F(0)=0$ și $\lim_{x\to+\infty}F(x)=\frac{3}{2}$, am demonstrat că ecuația $F(x)=k$ are soluție unică în intervalul $[0,+\infty)$, pentru orice $k\in\left[0,\frac{3}{2}\right)$.	2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 5

Prof: Szép Gyuszi

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt{2}>\sqrt{1}=1>\frac{1}{2}$	2p
	Cum $8=\sqrt{2^6}<\sqrt[3]{3^6}=9$, rezultă că $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$.	2p
	Prin urmare, $\sqrt{2}\in\left(\frac{1}{2},\sqrt[3]{3}\right)$.	1p
2.	Determinăm mai întâi coordonatele punctelor de intersecție ale parabolei cu axa Ox. Pentru aceasta, rezolvăm ecuația $f(x)=0$.	1p
	În cazul nostru, discriminantul este $\Delta=7^2-4\cdot1\cdot10=9$. Obținem soluțiile $x_1=-5$ și $x_2=-2$.	3p
	Punctele de intersecție ale parabolei cu axa Ox sunt $A(-5;0)$ și $B(-2;0)$.	
	Distanța cerută este $AB=\lvert-2-(-5)\rvert=\lvert3\rvert=3$.	1p
3.	Impunem condiția de existență a logaritmului: $4^x-6>0$, adică $x\in(\log_4 6,+\infty)$.	1p
	Ecuația dată, pentru $x\in(\log_4 6,+\infty)$, este echivalentă cu ecuația $4^x-6=2^x$, adică $\left(2^x\right)^2-2^x-6=0$.	1p
	Notăm $2^x=y$, $y>0$, și obținem ecuația $y^2-y-6=0$, care are soluțiile $y_1=-2$ și $y_2=3$.	1p
	Ținând cont de faptul că $y>0$, deducem că putem păstra doar soluția $y=3$.	
	Din $2^x=3$ se obține $x=\log_2 3$.	1p
	Cum $\log_4 6=\log_{2^2}6=\frac{1}{2}\log_2 6=\log_2\sqrt{6}<\log_2\sqrt{9}=\log_2 3$, rezultă că $\log_2 3\in(\log_4 6,+\infty)$.	1p
	Așadar, ecuația $\log_2\left(4^x-6\right)=x$ are soluția $x=\log_2 3$.	
4.	Cardinalul mulțimii $\{1,3,6,8\}$ este egal 4. Atunci numărul cazurilor posibile este egal cu $4\cdot4=16$.	2p
	Produsul a două numere naturale pare este par. Produsul dintre un număr natural impar și un număr natural par este par. Cazurile favorabile vor fi:	2p
	$(a,b)\in\{(1,6),(1,8),(3,6),(3,8),(6,1),(6,3),(6,6),(6,8),(8,1),(8,3),(8,6),(8,8)\}$	1p
	Probabilitatea cerută este $P=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$.	
5.	Cei doi vectori sunt coliniari dacă și numai dacă $\frac{2}{a}=\frac{3a+1}{3-a}$. Dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$, atunci obținem că	2p
	$2(3-a)=a(3a+1)$, adică ecuația de gradul al doilea $a^2+a-2=0$.	
	Discriminantul ecuației este $\Delta=9$. Obținem soluțiile $a_1=-2$ și $a_2=1$.	3p
6.	Avem $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.	2p

www.mateinfo.ro

	Atunci $\cos\left(2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$.	3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Avem $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ m & -1 & -1\end{vmatrix}=2+m-2+4m+1+1=5m+2$.	3p
	Rezolvând ecuația $5m+2=0$, obținem $m=-\frac{2}{5}$.	2p
b)	Dacă $m\neq-\frac{2}{5}$, atunci sistemul este compatibil determinat.	1p
	Pentru $m=-\frac{2}{5}$, conform subpunctului a), determinantul matricei sistemului este nul.	1p
	Matricea sistemului are rangul egal cu 2, deoarece $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1+4=5\neq0$.	1p
	Considerăm determinantul caracteristic $d_c=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & n\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-n+2$.	1p
	Sistemul este incompatibil pentru $m=-\frac{2}{5}$ și $n\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.	1p
c)	Deoarece x_0, y_0 și z_0 sunt în progresie aritmetică, deducem că $2y_0=x_0+z_0$, adică $x_0-2y_0+z_0=0$.	2p
	Dacă sistemul admite soluția (x_0,y_0,z_0), atunci din a doua ecuație a sistemului obținem că $x_0-2y_0+z_0=n$.	2p
	În concluzie, $n=0$.	1p
2. a)	Ecuația $g(\mathrm{x})=\hat{0}$, adică $x+\hat{3}=\hat{0}$, are în $\mathbb{Z}_5$ soluția $x=\hat{2}$.	2p
	Cum polinomul g divide polinomul f, trebuie ca $f(\hat{2})=\hat{0}$, adică $\hat{2}a+\hat{3}=\hat{0}$.	1p
	Ecuația $\hat{2}a+\hat{3}=\hat{0}$ este echivalentă cu $\hat{2}a=\hat{2}$. Obținem astfel soluțiile $a=\hat{1}$ și $a=\hat{3}$.	2p
b)	Pentru $a=\hat{1}$, obținem $f=X^3+X^2+X+\hat{1}$.	1p
	Pe de altă parte, avem $(X+\hat{1})(X^2+\hat{1})=X^3+X^2+X+\hat{1}$.	3p
	Prin urmare, $f=(X+\hat{1})(X^2+\hat{1})$.	1p
c)	Cum $f=X^3+X^2+X+\hat{1}$, avem $f(\hat{0})=\hat{0}^3+\hat{0}^2+\hat{0}+\hat{1}=\hat{1}\neq\hat{0}$,	2p
	$f(\hat{1})=\hat{1}^3+\hat{1}^2+\hat{1}+\hat{1}=\hat{4}\neq\hat{0}$, $f(\hat{2})=\hat{2}^3+\hat{2}^2+\hat{2}+\hat{1}=\hat{0}$,	1p

www.mateinfo.ro

	$f\left(\hat{3}\right)=\hat{3}^3+\hat{3}^2+\hat{3}+\hat{1}=\hat{0}$, $f\left(\hat{4}\right)=\hat{4}^3+\hat{4}^2+\hat{4}+\hat{1}=\hat{0}$.	1p
	În concluzie, ecuația $f(x)=\hat{0}$ are în $\mathbb{Z}_5$ soluțiile $x=\hat{2}$, $x=\hat{3}$ și $x=\hat{4}$.	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Avem $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-xe^2}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^2}{1}=-e^2\in\mathbb{R}^*$ și	2p
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+e^2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.	2p
	Atunci $y=-e^2x$ este ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f spre $-\infty$.	1p
b)	Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ pentru că se obține prin operații cu funcții derivabile.	1p
	$f'(x)=e^x-e^2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.	
	Fie $A\left(a,e^a-ae^2\right)$ un punct oarecare al graficului funcției f. Tangenta în punctul $A\left(a,e^a-ae^2\right)$ la graficul funcției f are panta egală cu $f'(a)=e^a-e^2$.	2p
	Cum tangenta la graficul funcției f trebuie să fie paralelă cu dreapta de ecuație $y=1$, rezultă că are loc egalitatea $e^a-e^2=0$ (dreptele paralele au pante egale). De aici obținem că $a=2$.	2p
	Punctul căutat este $A\left(2,-e^2\right)$.	
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\left(\dfrac{f'(x)}{(x-2)e^2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\left(\dfrac{e^x-e^2}{(x-2)e^2}\right)^{\frac{1}{x-2}}\overset{(1^\infty)}{=}$	2p
	$=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\left(1+\dfrac{e^x-e^2-xe^2+2e^2}{(x-2)e^2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{e^x-xe^2+e^2}{(x-2)^2e^2}}=\sqrt{e}$,	1p
	pentru că $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\dfrac{e^x-xe^2+e^2}{(x-2)^2e^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\dfrac{e^2(e^{x-2}-1)}{2e^2(x-2)}=\dfrac{1}{2}$.	2p
2. a)	Din $1\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ va rezulta că $t\in[0,1]\subset\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Atunci $\cos t>0$, pentru orice $t\in[0,1]$.	2p
	Cum $t^n\geq0$, pentru orice $t\in[0,1]$ și $n\in\mathbb{N}^*$, deducem că $t^n\cos t\geq0$, $(\forall)\ t\in[0,1]$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.	2p
	Prin urmare, $\int_0^1 t^n\cos t\,dt\geq0$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$, cee ce înseamnă că $x_n\geq0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.	1p
b)	Vom aplica metoda integrării prin părți. Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Pentru $t\in[0,1]$ considerăm că $u(t)=t^{n+1}$ și $v(t)=\sin t$. Funcțiile u și v sunt derivabile pe $[0,1]$, iar $u'(t)=(n+1)t^n$ și $v'(t)=\cos t$.	2p
	Funcțiile u' și v' sunt continue pe $[0,1]$. Atunci:	
	$x_{n+1}=\int_0^1 t^{n+1}\cos t\,dt=t^{n+1}\sin t\Big\vert_0^1-(n+1)\int_0^1 t^n\sin t\,dt=\sin1-(n+1)y_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.	3p
	Așadar, $x_{n+1}=-(n+1)y_n+\sin1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.	
c)	Cum $0\leq t^n\cos t\leq t^n$, $(\forall)\ t\in[0,1]$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$, rezultă că $0\leq x_n\leq\int_0^1 t^n\,dt=\dfrac{1}{n+1}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.	2p

www.mateinfo.ro

	Aplicând criteriul cleștelui, obținem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Conform punctului anterior, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Avem $y_{n+1} = (n+1)\mathrm{x}_n - \cos 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, adică $n\,\mathrm{x}_n = \mathrm{y}_{n+1} - x_n + \cos 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Trecând la limită în această egalitate, obținem $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = 1$.	1p 2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 6

Prof: Szép Gyuszi

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Avem $\log_3\left(\sqrt{10}-1\right)+\log_3\left(\sqrt{10}+1\right)=\log_3\left(\sqrt{10}-1\right)\left(\sqrt{10}+1\right)=$	3p
	$\log_3(10-1)=\log_3 9=2$.	2p
2.	Scriem relaţiile lui Viète: $\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1x_2=m\end{cases}$.	2p
	Atunci $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4-2m$.	2p
	Cum $x_1^2+x_2^2=10$, obţinem ecuaţia $4-2m=10$. Rezultă că $m=-3$.	1p
3.	Rezolvând ecuaţia $5^x+1=26$, obţinem $x=2$.	2p
	Atunci $g(26)=g\left(f(2)\right)=2$.	3p
4.	Mulţimea $A=\{1;2;3;4;5\}$ are $2^5=32$ submulţimi.	2p
	Numărul de submulţimi cu două elemente ale mulţimii A este egal cu $C_5^2=10$.	2p
	Atunci probabilitatea cerută este $P=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$.	1p
5.	$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MN}=\left\|\overrightarrow{MQ}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{MN}\right\|\cdot\cos 30^\circ=8\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$.	2p
	$\left\|\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MN}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{MQ}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2+2\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MN}=8^2+3^2+24\sqrt{3}=73+24\sqrt{3}$.	3p
6.	Avem $\cos\frac{17\pi}{36}=\cos\frac{18\pi-\pi}{36}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{36}\right)=\sin\frac{\pi}{36}$.	3p
	Atunci $\sin\frac{\pi}{36}-\cos\frac{17\pi}{36}=\sin\frac{\pi}{36}-\sin\frac{\pi}{36}=0$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Avem $\begin{vmatrix}3&-2\\-2&-2\end{vmatrix}=3\cdot(-2)-(-2)\cdot(-2)=-6-4=-10\neq 0$.	3p
	Atunci matricea A are rangul egal cu 2.	2p
b)	$A\cdot{}^tA=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2\\-2&-2\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&-8\\-8&17\end{pmatrix}$.	2p
	$\det\left(A\cdot{}^tA\right)=\begin{vmatrix}17&-8\\-8&17\end{vmatrix}=17^2-8^2$.	2p
	$17^2-8^2=(17-8)(17+8)=9\cdot 25=15^2$ şi deci $\det\left(A\cdot{}^tA\right)$ este pătrat perfect.	1p

www.mateinfo.ro

c)	${}^tA\cdot A=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&-2\\-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&-2&-12\\-2&8&-2\\-12&-2&13\end{pmatrix}$.	2p
	Atunci $\det\left({}^tA\cdot A\right)=\begin{vmatrix}13&-2&-12\\-2&8&-2\\-12&-2&13\end{vmatrix}=169\cdot 8-48-48-144\cdot 8-52-52=200-96-104=0$.	3p
2. a)	Ecuația $g(\mathrm{x})=0$ are soluțiile $y_1=-i$ și $y_2=i$.	1p
	Vom aplica schema lui Horner pentru determinarea restului împărțirii polinomului f la polinomul g.	
	$\begin{array}{c\|cccc} & X^3 & X^2 & X^1 & X^0 \\ & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline -i & 1 & -i+1 & 1-i & -i+1 \\ \hline i & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & X^1 & X^0 & X^1 & X^0 \end{array}$	3p 1p
	Restul căutat este $r=X+1$.	
b)	Avem $f=X^3+X^2+2X+2=X^2(X+1)+2(X+1)=(X+1)(X^2+2)$.	2p
	Una dintre rădăcinile polinomului f este egală cu -1, ceea ce conduce la anularea unuia dintre factorii produsului $(1+x_1)(1+\mathrm{x}_2)(1+\mathrm{x}_3)$. De aici se deduce imediat că $(1+x_1)(1+\mathrm{x}_2)(1+\mathrm{x}_3)=0$.	3p
c)	Rădăcinile polinomului f sunt $x_1=-1$, $x_2=-i\sqrt{2}$ și $x_3=i\sqrt{2}$. Atunci	2p
	$g(x_1)=(-1)^2+1=2$, $g(x_2)=\left(-i\sqrt{2}\right)^2+1=1-2i$ și $g(x_3)=\left(i\sqrt{2}\right)^2+1=1-2i$.	2p
	Avem $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)=2\cdot(1-2i)^2=2(-3-4\mathrm{i})=-6-8i$.	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(0)=\frac{3}{2}$. Așadar, trebuie să scriem ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $A\left(0,\frac{3}{2}\right)$.	
	Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$, fiind egală cu raportul a două funcții derivabile.	1p
	$f'(\mathrm{x})=\left(\frac{4x+3}{3x+2}\right)'=\frac{4(3\mathrm{x}+2)-3(4\mathrm{x}+3)}{(3\mathrm{x}+2)^2}=-\frac{1}{(3\mathrm{x}+2)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$, iar de aici deducem că $f'(0)=-\frac{1}{4}$.	2p
	Ecuația tangentei în punctul $A\left(0,\frac{3}{2}\right)$ la graficul funcției f este: $y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}(\mathrm{x}-0)$, adică $y=-\frac{1}{4}\mathrm{x}+\frac{3}{2}$.	2p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(\mathrm{x})-\frac{x}{3x+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+3}{3x+2}\right)^{x\,(1^\infty)}=$	2p

www.mateinfo.ro

	$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x+2}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{3x+2}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$.	3p
c)	$f''(x)=\left(-\frac{1}{(3x+2)^2}\right)'=\frac{6}{(3x+2)^3}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$.	1p
	Avem $g'(x)=\left(5^x\right)'f'\left(5^x\right)=5^x\ln 5\cdot f'\left(5^x\right)$ și $g''(x)=5^x\ln^2 5\cdot f'\left(5^x\right)+5^x\ln 5\cdot f''\left(5^x\right)$.	1p
	Deci $g''(x)=\frac{5^x\ln^2 5\left(3\cdot 5^x-2\right)}{\left(3\cdot 5^x+2\right)^3}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.	2p
	Punctul $x=\log_5\frac{2}{3}$ este punct de inflexiune.	1p
2. a)	Dacă funcția f este o primitivă a unei funcții pe $\mathbb{R}$, atunci funcția f trebuie să fie continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$. Funcția f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$.	
	Din condiția de continuitate a funcției f în punctul $x_0=0$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\left(2^x+m\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(2nx+\sin x\right)$, adică $m+1=0$. Prin urmare, $m=-1$.	2p
	Din condiția de derivabilitate a funcției f în punctul $x_0=0$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\frac{2^x-1}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{2nx+\sin x}{x}$, adică $2n+1=\ln 2$. Așadar, $n=\ln\sqrt{\frac{2}{e}}$.	2p
	Funcția f este o primitivă a unei funcții pe $\mathbb{R}$ pentru $m=-1$ și $n=\ln\sqrt{\frac{2}{e}}$.	1p
b)	Pentru $m=-1$ și $n=1$ obținem funcția $f(x)=\begin{cases}2^x-1, & x\le 0\\ 2x+\sin x, & x>0\end{cases}$. Conform subpunctului a),	
	pentru $m=-1$, funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$. În particular, funcția f este continuă pe $\left[-1,\frac{\pi}{3}\right]$.	2p
	Prin urmare, funcția f este integrabilă pe $\left[-1,\frac{\pi}{3}\right]$.	
	$\int_{-1}^{\frac{\pi}{3}}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\left(2^x-1\right)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2x+\sin x)\,dx=$	2p
	$=\left(\frac{2^x}{\ln 2}-x\right)\Big\|_{-1}^{0}+x^2\Big\|_{0}^{\frac{\pi}{3}}-\cos x\Big\|_{0}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2\ln 2}-1+\frac{\pi^2}{9}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{9}$.	1p
c)	$\mathcal{A}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(2nx+\sin x)\,dx=$	1p
	$=x^2n\Big\|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}-\cos x\Big\|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{3}{2}+\frac{8\pi^2 n}{9}$.	3p

www.mateinfo.ro

	$\mathcal{A}=5 \Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{8\pi^2 n}{9}=5 \Leftrightarrow n=\frac{63}{16\pi^2}$.	1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Teler Marian

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$	2p
	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = \log_{3^{-1}} \left(3^{-3}\right) = \frac{-3}{-1} = 3$	2p
	$\log_2 \frac{1}{8} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 0$	1p
2.	$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$	1p
	$V_f\left(1, a-1\right)$, $V_g\left(\frac{b}{4}, 1+\frac{b^2}{8}\right)$	2p
	Se obţine sistemul: $\frac{b}{4}=1, a-1=1+\frac{b^2}{8}$, $a=b=4$	2p
3.	$\log_9 \left(x+1\right) = \log_{3^2} \left(x+1\right) = \frac{1}{2}\log_3 \left(x+1\right)$	2p
	Se obţine $\frac{3}{2}\log_3 \left(x+1\right) = \frac{3}{2}$	2p
	$\log_3 \left(x+1\right) = 1, x = 2$	1p
4.	Numărul cazurilorposibile este $70-6=64$	2p
	Mulţimea cazurilor favorabile este $\left\{3^2, 4^2, ..., 8^2\right\} \cup \left\{2^3, 3^3, 4^3\right\}$, 8 cazuri	2p

www.mateinfo.ro

	$p=\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$	1p
5.	$x_B=\frac{x_A+x_M}{2}, y_B=\frac{y_A+y_M}{2}$ $M(5,2)$	2p 3p
6.	Se verifică relaţia $AB^2+AC^2=BC^2$, triunghiul este dreptunghic, $m(\measuredangle A)=90^0$ $A_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=120$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}$, $2A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}$ $A^2-2A=O_2$	2p 2p 1p
b)	$X(\mathrm{p})X(\mathrm{q})=(I_3+pA)(I_3+qA)=I_3+pA+qA+pqA^2$ $X(\mathrm{p})X(\mathrm{q})=X(\mathrm{p}+q+2pq)$	3p 2p
c)	Conform b), $X(2)X\left(-\frac{2}{5}\right)=X\left(2-\frac{2}{5}-\frac{8}{5}\right)=X(0)=\mathrm{I}_3$ Din i), rezultă $(X(2))^{-1}=X\left(-\frac{2}{5}\right)$	3p 2p
2. a)	Se aplică teorema lui Bézout, $f(1)=0$. $a=-3$	3p 2p

www.mateinfo.ro

b)	$\frac{x_1+1}{x_1}+\frac{x_2+1}{x_2}+\frac{x_3+1}{x_3}=1+\frac{1}{x_1}+1+\frac{1}{x_2}+1+\frac{1}{x_3}=3+\frac{x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2}{x_1x_2x_3}$ Se aplică relaţiile lui Viète, se obţine 0	3p 2p
c)	$f=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$ $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=f(1)=3$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=-2$ Dreapta $y=x-2$ este asimptotă oblică către $+\infty$	2p 2p 1p
b)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2x)-f(0)}{x}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x-0}=2f'(0)$ $f'(x)=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$, $f'(0)=2$, finalizare.	3p 2p
c)	Ecuaţia tangentei la grafic este: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ Se obţine: $y+1=2x$, sau $2x-y-1=0$	3p 2p
2. a)	$I_1=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(x-\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=1-\ln 2$ $I_2=\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x^2+x-x}{x+1}dx=\int_0^1 xdx-I_1=\ln 2-\frac{1}{2}$	3p 2p
b)	$I_{n+1}+I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}+x^n}{x+1}dx=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$ Pentru $x\in[0,1]$ avem $x^{n+1}\le x^n$, rezultă $I_{n+1}\le I_n$, şirul (I_n) este descrescător şi mărginit, deci convergent	2p 2p

www.mateinfo.ro

	Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$	1p
c)	$\frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+1} \le I_n + I_n = 2I_n \Rightarrow \frac{n}{2(n+1)} \le nI_n$	2p
	$\frac{1}{n+1} = I_{n+1} + I_n \ge I_{n+1} + I_{n+1} = 2I_{n+1} \Rightarrow I_{n+1} \le \frac{1}{2(n+1)}, I_n \le \frac{1}{2n}$, $n I_n \le \frac{1}{2}$	2p
	Din $\frac{n}{2(n+1)} \le nI_n \le \frac{1}{2}$, cu teorema cleştelui se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{2}$	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Teler Marian

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$A = \{2,4,6,...,100\}$, $card(A) = 50$	1p
	$B = \{5,10,15,...,100\}$, $card(B) = 20$	1p
	$A \cap B = \{10,20,30,...,100\}$, $card(A \cap B) = 10$	1p
	$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B) = 60$	2p
2.	$\frac{(2-i)5}{2+i} + \frac{(2+i)a}{2-i} = \frac{5(2-i)+a(2+i)}{2^2 - i^2} =$	2p
	$\frac{10+2a+(a-5)i}{5}$	2p
	Finalizare, $a = 5$	1p

www.mateinfo.ro

3.	Cu notaţia $2^x = y$, ecuaţia devine: $y^2 - 5y + 6 = 0$ Obţinem: $y_1 = 2, y_2 = 3$ $2^x = 2, x_1 = 1$, $2^x = 3, x_2 = \log_2 3$	1p 2p 2p
4.	$A_x^2 = x(x-1)$ $C_x^{x-2} = C_x^2 = \frac{x(x-1)}{2}$ Obţinem: $\frac{3x(x-1)}{2} = 18, x(x-1) = 12$ Finalizare, $x = 4$	1p 1p 2p 1p
5.	A,B,C coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & m & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$ Finalizare, $m = 14$	3p 2p
6.	$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{8}{9}$ $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 6$, $x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a} = 6$. (Relaţiile lui Viète) $f(x_1 + x_2 + x_3) - f(x_1 x_2 x_3) = 0$	3p 2p
b)	Adunând x_2 în relaţia $x_1 + x_3 = 2x_2$, obţinem $3x_2 = x_1 + x_2 + x_3 = 6$, $x_2 = 2$ $x_2 = 2$ verifică ecuaţia, $m = 11$	3p 2p

www.mateinfo.ro

c)	$x_1=1, x_2=2, x_3=3$ Se obţine $C_3^3+C_5^1+C_4^2=12$	3p 2p
2 a)	$A^2=O_3$	5p
b)	$BC=(I_3+A)(I_3-A)=I_3-A^2=I_3$ $CB=(I_3-A)(I_3+A)=I_3-A^2=I_3$ $BC=CB$	2p 2p 1p
c)	$BC=CB=I_3$ $B^{-1}=C$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ $f'(x)=0\Rightarrow x=0$ x | $-\infty$ 0 $+\infty$ $f'(x)$ | - - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + + + $x=0$ este punct de minim.	2p 1p 1p 1p
b)	$f''(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $f''(x)>0, \forall x\in R$, graficul funcţiei f nu are puncte de inflexiune	3p 2p
c)	$g_0(x)=f(x)+f'(x)-e^x=0$ Se obţine $g_{n+1}(x)=g_n'(x)$, Se obţine $g_n(x)=0, \forall n\in N$	2p 1p 2p

www.mateinfo.ro

2.	Fie F o primitivă a funcţiei f $\Rightarrow F'(x)=f(x),\forall x\in(-2,\infty)$	2p
a)	$F''(x)=f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2},\forall x\in(-2,\infty)$	2p
	$F''(x)>0,\forall x\in(-2,\infty)$, F este convexă	1p
b)	$\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}dx=\int_0^1\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}dx=\int_0^1\frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx$	2p
	$\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}dx=\int_0^1\frac{(x^2+3x+2)'}{x^2+3x+2}dx=\ln\left(x^2+3x+2\right)\Big\vert_0^1$	2p
	$\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}dx=\ln 3$	1p
c)	Soluţia 2	
	$\int_x^{3x}f(t)dt\geq\int_x^{3x}dt=2x\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\int_x^{3x}f(t)dt=\infty$	2p
	Se aplică regula lui L'Hospital, $\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x f(t)dt}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_x^{3x}f(t)dt\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{(F(3x)-F(x))'}{1}=\lim_{x\to\infty}(3f(3x)-f(x))\ldots$	2p
	$=\lim_{x\to\infty}\left(3\cdot\frac{6x+3}{3x+2}-\frac{2x+3}{x+2}\right)=4$	1p
	.....	
	Soluţuia 2	2p
	$\int_x^{3x}f(t)dt=\int_x^{3x}\frac{2t+3}{t+2}dt=\int_x^{3x}\left(2-\frac{1}{t+2}\right)dt$	
	$\int_x^{3x}f(t)dt=\int_x^{3x}\frac{2t+3}{t+2}dt=(2t-\ln(t+2))\Big\vert_x^{3x}=4x+\ln\frac{x+2}{3x+2}$	2p

www.mateinfo.ro

	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_x^{3x} f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{x+2}{3x+2}\right)=4$	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Teler Marian

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$7<\sqrt{50}<7,1$ Produsul este egal cu 0	3p 2p
2.	$2^3=4^{2x-1}\Rightarrow 2^3=\left(2^2\right)^{2x-1}$ $2^3=2^{4x-2}$ $4x-2=3, x=\dfrac{5}{4}$	2p 1p 2p
3.	$\left\|\sqrt{2}-i\right\|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{3}$ $\|z\|=\left(\sqrt{3}\right)^6=27$	3p 2p
4.	Se obţine: $\log_2\dfrac{2-x}{2+x}=\log_2\dfrac{1}{2}$, cu condiţiile $2-x>0, 2+x>0$ $\dfrac{2-x}{2+x}=\dfrac{1}{2}$, $2+x=2(2-x), x=\dfrac{2}{3}$	3p 2p

www.mateinfo.ro

5.	$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}=-3$ $BC=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{2}$ $A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot h_A$, $\sqrt{2}\cdot h_A=3$, $h_A=\frac{3\sqrt{2}}{2}$	2p 2p 1p
6.	Soluţia 1 Aria triunghiului este $S=\frac{5\cdot 12}{2}=30$ Lungimea ipotenuzei este egală cu 13, semiperimetrul este $p=\frac{a+b+c}{2}=15$ $r=\frac{S}{p}=2$ ..... Soluţia 2 Fie O centrul cercului şi M, N, P punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC. Patrulaterul ANOP este pătrat cu latura r, iar $BM\equiv BP=x, CM\equiv CN=y$. (Tangente dintr-un punct exterior la cerc). Lungimea ipotenuzei este 13. Obţinem sistemul: $\begin{cases}r+x=12\\ r+y=5\\ x+y=13\end{cases}$, $r=2$	2p 2p 1p 3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 5\\ 1 & 3 & m\end{vmatrix}$ $\Delta=m-4$	2p 3p

www.mateinfo.ro

b)	Sistemul are soluţie unică dacă şi numai dacă $\Delta \neq 0$	3p
	$m \in R-\{4\}$	2p
c)	Pentru $m=4$, $rang\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=2$	2p
	Notăm $z=\alpha \in Z$ şi obţinem sistemul: $\begin{cases} 2x+y=-3\alpha \\ 3x+2y=-5\alpha \end{cases}$	1p
	Sistemul are soluţia: $\begin{cases} x=-\alpha \\ y=-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$, $\alpha \in Z$	1p
	$x_0^2+y_0^2+z_0^2 \leq 3 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq 1, \alpha \in \{-1,0,1\}$	1p
2. a)	$\begin{cases} x \perp y=7 \\ x \circ y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=10 \\ xy-3(x+y)+5=0 \end{cases}$	2p
	$\begin{cases} x+y=10 \\ xy=25 \end{cases}$	1p
	Se rezolvă sistemul, $x=y=5$	2p
b)	$e_1=3$	2p
	e_1 este elementul neutru al legii de compoziţie „$\perp$" , rezultă $e_1 \perp e_2=e_2$	1p
	e_2 este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$" , rezultă $e_2 \circ e_1=e_1$	1p
	$(e_1 \perp e_2) \circ e_1=e_1=3$	1p
c)	$x \circ y=(x-3)(y-3)+3$	1p
	$x \circ x \circ y=11 \Leftrightarrow (x-3)^2(y-3)=8$	1p
	$\begin{cases} (x-3)^2=1 \\ y-3=8 \end{cases}$, $(x,y) \in \{(2,11),(4,11)\}$	1p 1p

www.mateinfo.ro

	$\begin{cases}(x-3)^2=4\\ y-3=2\end{cases}$, $(x,y)\in\{(1,5),(5,5)\}$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Tangentele la grafice sunt perpendiculare dacă $f'(a)g'(a)=-1$	2p
	$f'(x)=2ax-3x^2$, $g'(x)=4x^3-3ax^2$,	2p
	Obţinem $-a^5=-1, a=1$	1p
b)	$f''(x)=2a-6x$	2p
	x | $-\infty$ $\quad$ $\frac{a}{3}$ $\quad$ $+\infty$ f''(x) | + + + + + + + + + + 0 - - - - - - - - - - - - - - - -	2p
	$x=\frac{a}{3}$ este punct de inflexiune	1p
c)	$g''(x)=12x^2-6ax$	2p
	$g''(x)=0, x_1=0, x_2=\frac{a}{2}$	2p
	Graficul funcţiei g nu are puncte de inflexiune dacă $x_1=x_2, a=0$	1
2. a)	Fie F o primitivă a funcţiei f, avem $F'(x)=f(x)$	2p
	$F''(x)=f'(x)=\frac{x^2-3}{x^2}$	2p
	$x=\sqrt{3}$ este punct de inflexiune	1p
b)	$f(x)=x+2+\frac{3}{x}, f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+2+3x$	2p
	$\int f(x)dx=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln x+c$	2p

www.mateinfo.ro

	$\int f\left(\frac{1}{x}\right)dx = \ln x + 2x + \frac{3x^2}{2} + c$	1p
c)	Soluţia 1	
	$\int_1^x f(t)dt \geq \int_1^x tdt = \frac{x^2-1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)dt = \infty$	2p
	Se aplică regula lui L'Hospital, $\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x f(t)dt}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_1^x f(t)dt\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x} = \ldots$	2p
	$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2}\right) = \frac{1}{2}$	1p
	.....	
	Soluţia 2	
	$\int_1^x f(t)dt = \int_1^x \left(t + 2 + \frac{3}{t}\right)dt = \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 3\ln t\right)\Big\|_1^x = \frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln x - \frac{5}{2}$	2p
	$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x f(t)dt}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln x - \frac{5}{2}}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x} + \frac{3\ln x}{x^2} - \frac{5}{2x^2}\right) = \ldots$	2p
	Finalizare, $\frac{1}{2}$	1p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Tomiță Liliana

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$[x]=y;\ y\in\mathbb{Z};\ \ 2y^2-3y+1=0;\ \ y_1=1;\ \ y_2=\frac{1}{2}$	3p
	$y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y=1\Rightarrow [x]=1\Rightarrow x\in[1,2)$	2p
2.	$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$	1p
	$r=\lvert z\rvert=2,\ \alpha=\frac{5\pi}{3}$	3p
	$z=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$	1p
3.	$T_{k+1}=C_{100}^{k}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{100-k}\cdot\left(\sqrt{a}\right)^{k}$	1p
	$\frac{100-k}{3}=5,\ k=85$	2p
	$T_{86}=C_{100}^{85}x^5a^{42}\sqrt{a}$	2p
4.	$\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{1}{3}\Rightarrow\cos a=3\sin a$	2p
	$\sin^2 a+\cos^2 a=1,\ a\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right);\ \cos a=\frac{3\sqrt{10}}{10}$	3p
5.	$\vec{u}\cdot\vec{v}=-8$	2p
	$-8<0\Rightarrow$ concluzia	3p
6.	$m_{BC}=-2$	2p

www.mateinfo.ro

	$y-y_A=m_{BC}\left(x-x_A\right)$ $y=-2x+11$	1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\alpha\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&2&4&1\end{pmatrix}$ $\beta\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&5&1\end{pmatrix}$ $\alpha\beta\neq\beta\alpha$	2p 2p 1p
b)	$x=\beta\alpha^{-1};\ \alpha^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&5&3&2\end{pmatrix}$ $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&1&2\end{pmatrix}$	3p 2p
c)	$\beta^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&5&1&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\x_1&x_2&x_3&x_4&x_5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\x_1&x_2&x_3&x_4&x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&5&1&3\end{pmatrix}$ $x\in\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&4&5&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&1&3&4\end{pmatrix}\right\}$	2p 1p 2p
2. a)	$a=1\Rightarrow f\left(x\right)=x^3-x^2+x-1$ $f\left(-1\right)=\left(-1\right)^3-\left(-1\right)^2+\left(-1\right)-1=-1-1-1-1$ $f\left(-1\right)=-4$	1p 3p 1p
b)	$a=1\Rightarrow x^3-x^2+x-1=0\Rightarrow\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)=0$ $x_1=1,\ x_2=-i,\ x_3=i$	3p 2p
c)	$x_1+x_2+x_3=1;\quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=a;\quad x_1^2+x_2^2+x_3^2=1-2a$	2p

www.mateinfo.ro

	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-a\left(x_1+x_2+x_3\right)+3$	2p
	$10=1-2a-a\cdot 1+3$	
	$a=-2$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)=3x^5+15x^4-10x^3-90x^2+x+1$	2p
	$f'(x)=3\cdot 5x^4+15\cdot 4x^3-10\cdot 3x^2-90\cdot 2x+1$	2p
	$f'(x)=15x^4+60x^3-30x^2-180x+1$	1p
b)	$f'(x)=15x^4+60x^3-30x^2-180x+m$	1p
	$f''(x)=60x^3+180x^2-60x-180$	1p
	$f''(x)=0\Rightarrow x_1=1;\ x_2=-1;\ x_3=-3$	3p
c)	f continuă	
	$f''(x)>0,\ (\forall)x\in(-3,-1)\cup(1,\infty);\ f''(x)<0,\ (\forall)x\in(-\infty,-3)\cup(-1,1)$	1p
	Punctele de inflexiune: $A(-3;-54-3m+n);\ B(-1;-68-m+n);\ C(1;-82+m+n)$	2p
	$\begin{vmatrix}-3 & -54-3m+n & 1\\ -1 & -68-m+n & 1\\ 1 & -82+m+n & 1\end{vmatrix}=0$	2p
2. a)	$\mathcal{I}_1=\int_0^1(1+x)2^x\,dx=(1+x)\frac{2^x}{\ln 2}\Big\vert_0^1-\int_0^1\frac{2^x}{\ln 2}dx$	3p
	$=\frac{3}{\ln 2}-\frac{1}{\ln^2 2}$	2p
b)	$\mathcal{I}_{n+1}-\mathcal{I}_n=\int_0^1(1+x)^n\cdot x\cdot 2^x\,dx$	3p
	$(1+x)^n\cdot x\cdot 2^x\geq 0,\ (\forall)x\in[0,1]\Rightarrow(\mathcal{I}_n)_{n\geq 1}$ șir crescător	2p

www.mateinfo.ro

c)	$\mathcal{I}_n = (1+x)^n \frac{2^x}{\ln 2}\Big\|_0^1 - \int_0^1 n(1+x)^{n-1}\frac{2^x}{\ln 2}dx$	2p
	$\mathcal{I}_n = \frac{2^n\cdot 2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} - \frac{n}{\ln 2}\mathcal{I}_{n-1}$	2p
	$\mathcal{I}_n \cdot \ln 2 = 2^{n+1} - 1 - n\mathcal{I}_{n-1}$	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Tomiță Liliana

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_{50} = a_1 + 49r$	3p
	$a_{50} = -144$	2p
2.	$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k}\cdot b^k$	1p
	$T_8 = C_{20}^7 (2x)^{14}(-y)^7$	2p
	$T_8 = -C_{20}^7 \cdot 2^{14}\cdot x^{14}y^7$	2p
3.	$\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{256}$	2p
	$\sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{216}$	2p
	$\sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[12]{280}$	1p
4.	$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$	2p

www.mateinfo.ro

	$\sin 105^\circ = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	3p
5.	$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert} = \frac{m+1}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{2}}$	2p
	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{m+1}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow m = 0$	3p
6.	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$	2p
	$p = 7$	1p
	$S = 2\sqrt{14}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 2m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 2m^3 - 4m + 2$	3p
	$\det A = 2\left(m^3 - 2m + 1\right) \vdots_2$, $(\forall) m \in \mathbb{Z}$	2p
b)	$m = 1 \Rightarrow \det A = 0$	1p
	Sistemul este compatibil simplu nedeterminat	2p
	$S = \{(4-u\ ;0\ ;u) / u \in \mathbb{C}\}$	2p
c)	$\det A \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \left\{1\ ; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$	2p
	$x = \frac{2(2m-1)}{m^2+m-1}$, $y = \frac{2(m-1)}{m^2+m-1}$, $z = \frac{2(2m-1)}{m^2+m-1}$	3p
2. a)	$(\forall) x, y \in G \Rightarrow x * y \in G$	1p
	$x * y = (x+2)(y+2) - 2$	2p
	$(x+2)(y+2) > 0 \Rightarrow x * y > -2$	2p

www.mateinfo.ro

b)	$(x*y)*z=x*(y*z),\ (\forall)x,y,z\in G$	1p
	$x*y=y*x,\ (\forall)x,y\in G$	1p
	$e=-1$	1p
	$x^{'}=\frac{1}{x+2}-2$	1p
	$(G,*)$ grup	1p
c)	$f:G\to\mathbb{R},\ \mathrm{f}(x)=\ln(x+2)$ - izomorfism	1p
	$f(x*y)=f(x)+f(y),\ (\forall)x,y\in G$	2p
	f - bijectivă	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$y-f(1)=f^{'}(1)(x-1)$	1p
	$f^{'}(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$	2p
	$y=x-1$	2p
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty\Rightarrow x=0$ asimptotă verticală la dreapta	2p
	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$ asimptotă orizontală spre ∞	3p
c)	$g(x)=\frac{1}{x^2},\ x\in(0,1),\ g$ continuă pe $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$	1p
	$g^{'}(x)=-\frac{2}{x^3},\ x\in(0,1),\ g$ derivabilă pe $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$	1p
	$(\exists)c\in\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$ a.î. $g\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{3}\right)=g^{'}(c)\cdot\frac{1}{6}$	2p

www.mateinfo.ro

	$c=\frac{1}{\sqrt[3]{15}}$	1p
2. a)	$4\mathcal{I}_n+\mathcal{I}_{n+1}=\int_0^1 x^n dx$ $\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$	3p 2p
b)	$\mathcal{I}_2=\int_0^1 \frac{x^2}{x+4}dx$ $\mathcal{I}_2=\int_0^1\left(x-4+\frac{16}{x+4}\right)dx$ $\mathcal{I}_2=-\frac{7}{2}+16\ln\frac{5}{4}$	1p 2p 2p
c)	$\mathcal{I}_{n+1}-\mathcal{I}_n\le 0,\ (\forall)n\ge 1\Rightarrow(\mathcal{I}_n)_{n\ge 1}$ monoton descrescător $\mathcal{I}_n\ge 0,\ (\forall)n\ge 1$ $\lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_n=0$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Tomiță Liliana

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3}=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3^5}$	3p

www.mateinfo.ro

	$\log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3} = 5$	2p
2.	$z^4 = 81$ $z^2 = 9;\ z^2 = 9i^2$ $z_1 = 3;\ z_2 = -3;\ z_3 = 3i;\ z_4 = -3i$	1p 2p 2p
3.	$\Delta = 4$ $G_f \cap Ox = \{A(1,0); B(3,0)\}$ $f(0) = 3 \Rightarrow G_f \cap Oy = \{C(0,3)\}$	1p 2p 2p
4.	$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ $A = \frac{9\sqrt{3}}{4}$	3p 2p
5.	$f:\{1,2,3,...,10\} \to \{1,2,3,...,10\}$, f surjectivă $\Rightarrow f$ bijectivă $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = 1$	2p 3p
6.	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = 2 \cdot \overrightarrow{AC}$ $\left\|2 \cdot \overrightarrow{AC}\right\| = 2 \cdot AC$ $AC = \sqrt{29} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\right\| = 2\sqrt{29}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A = 0$ rang $A = 1$	2p 3p
b)	$A^2 = 10A$ $P(n): A^n = 10^{n-1}A, (\forall) n \geq 2$ (demonstrația) $A^{2014} = 10^{2013}A$	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

c)	$\det B = 11$ $B^{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -2 & -1 \\ -6 & 7 & -2 \\ -9 & -6 & 8 \end{pmatrix}$	2p 3p
2. a)	$f(X) = X^4 + 4X^3$ $x^4 + 4x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x+4) = 0$ $x_1 = x_2 = x_3 = 0,\ x_4 = -4$	1p 2p 2p
b)	$x_1 = x_2 = m + n\sqrt{3},\ x_3 = x_4 = m - n\sqrt{3}$ rădăcinile lui f $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -4 \Rightarrow m = -1;\ x_1 x_3 = x_2 x_4 = m^2 - 3n^2 = 1 - 3n^2$ $(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) + x_1 x_3 + x_2 x_4 = 0 \Rightarrow n = 1$ sau $n = -1$ $a = 2,\ b = 1$	1p 1p 1p 2p
c)	$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4a$ $x = 1$ rădăcină dublă $\Rightarrow f(1) = 0$ şi $f'(1) = 0$ $a = 4,\ b = \frac{11}{4}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	f continuă $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}}$ f derivabilă pe $(0,2)$	2p 2p 1p
b)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \in [0,2]$ $f'(x) > 0,\ (\forall) x \in (0,1)$	1p 1p

www.mateinfo.ro

	$f'(x)<0,\ (\forall)x\in(1,2)$ $A(1;1)$ punct de maxim $B(0,0);\ C(2,0)$ puncte de minim	1p 2p
c)	$f''(x)=\dfrac{1}{(x^2-2x)\sqrt{2x-x^2}},\ x\in(0,2)$ $f''(x)<0,\ (\forall)x\in(0,2)$ f concavă	2p 2p 1p
2. a)	$\mathcal{I}_1=-\cos x+C$ $\mathcal{I}_2=\dfrac{2x-\sin 2x}{4}+C$ $\mathcal{I}_3=-\cos x+\dfrac{\cos^3 x}{3}+C$	1p 2p 2p
b)	$\mathcal{I}_n=\int \sin^{n-1}x(-\cos x)'\,dx$ $\mathcal{I}_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)(\mathcal{I}_{n-2}-\mathcal{I}_n)$ $n\mathcal{I}_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\mathcal{I}_{n-2}$	1p 2p 2p
c)	$24\mathcal{I}_6=-4\sin^5 x\cos x+20\mathcal{I}_4;\ 20\mathcal{I}_4=-5\sin^3 x\cos x+15\mathcal{I}_2$ $15\mathcal{I}_2=\dfrac{15}{4}(2x-\sin 2x)+C$ $24\mathcal{I}_6=-4\sin^5 x\cos x-5\sin^3 x\cos x+\dfrac{15}{2}x-\dfrac{15}{2}\sin x\cos x+C$	2p 1p 2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Viorica Lungana

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. 3p

$$\frac{2x+3}{x-1}=\frac{2x-2+5}{x-1}=2+\frac{5}{x-1}\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow\frac{5}{x-1}\in\mathbf{Z}$$

2p

$$\Leftrightarrow x-1\in\{-5,-1,1,5\}\Leftrightarrow x\in\{-4,0,2,6\}$$

2.

1p

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2},n\geq 1$$

2p

$$n=1\Rightarrow a_1=\frac{3-1}{6}=\frac{1}{3};\ \ n=4\Rightarrow a_4=\frac{12-1}{6}=\frac{11}{6}$$

2p

$$S_4=\frac{(a_1+a_4)\cdot 4}{2}=2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{11}{6}\right)=2\cdot\frac{13}{6}=\frac{13}{3}$$

3.

1p

$$x^2-2(m-2)x+m>0,(\forall)x\in R\Leftrightarrow\Delta<0$$

2p

$$\Delta=b^2-4ac=4(m-2)^2-4m=4(m^2-5m+4)$$

2p

$$m^2-5m+4=0\Rightarrow\begin{matrix}m_1=1\\ m_2=4\end{matrix}$$

m	$-\infty$		1		4		∞
m^2-5m+4	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	

2p

$$m^2-5m+4<0\Leftrightarrow m\in(1,4)$$

4. 2p

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!},0\leq k\leq n$$

3p

$$A_{12}^7=\frac{12!}{5!}=6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12$$

www.mateinfo.ro

5.	$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{3}$ Din $AA'\perp BC\Rightarrow m_{AA'}=-\frac{1}{m_{BC}}=3$ Ecuația dreptei determinată de un punct și o direcție: $y-y_0=m(x-x_0)$ $AA': y-5=3(x-2)\Leftrightarrow AA': 3x-y-1=0$	2p 3p
6.	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos a+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-a\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+a\right)=\cos a+$ $=2\cos\frac{\frac{2\pi}{3}-a+\frac{2\pi}{3}+a}{2}\cos\frac{\frac{2\pi}{3}-a-\frac{2\pi}{3}-a}{2}=$ $=\cos a+2\cos\frac{2\pi}{3}\cos(-a)=\cos a+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cos a=\cos a-\cos a=0$	1p 1p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1&1-1\\-1+1&-1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_2$ $B\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1&-1+1\\1-1&-1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_2$ Deci $A\cdot B=B\cdot A=O_2$	2p 2p 1p
b)	$(A+B)^n=C_n^0A^n+C_n^1A^{n-1}\cdot B+C_n^2A^{n-2}\cdot B^2+\ldots+C_n^{n-1}A\cdot B^{n-1}+C_n^nB^n=$ $=A^n+C_n^1A^{n-2}\cdot AB+\ldots+C_n^{n-1}AB\cdot B^{n-2}+B^n=A^n+B^n$ Deoarece $A\cdot B=B\cdot A=O_2$, conform punctului a).	3p 2p
c)	$A^{2012}+B^{2012}=(A+B)^{2012}=\left[\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right]^{2012}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}^{2012}=$ $=(2\cdot I_2)^{2012}=2^{2012}\cdot I_2=\begin{pmatrix}2^{2012}&0\\0&2^{2012}\end{pmatrix}$	1p 2p

www.mateinfo.ro

	$\det\left(A^{2012}+B^{2012}\right)=\begin{vmatrix}2^{2012} & 0\\ 0 & 2^{2012}\end{vmatrix}=2^{2012}\cdot 2^{2012}=2^{4024}$	2p
2.	$x^2y^2-x^2-y^2+2=\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1>1,(\forall)x.y\in(1,\infty)$	1p
a)	$x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1}\in M,(\forall)x,y\in(1,\infty)$	2p
	$(x*y)*z=\sqrt{\left[(x*y)^2-1\right]\left(z^2-1\right)+1}=\sqrt{\left[\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1-1\right]\left(z^2-1\right)+1}=$	
	$=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)\left(z^2-1\right)+1},(\forall)x,y,z\in(1,\infty)$; (1)	
	$x*(y*z)=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left[(y*z)^2-1\right]+1}=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left[\left(y^2-1\right)\left(z^2-1\right)+1-1\right]+1}=$	2p
	$=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)\left(z^2-1\right)+1},(\forall)x,y,z\in(1,\infty)$; (2)	
	Din relațiile (1) și (2) rezultă că legea este asociativă pe M.	
b)	Să arătăm că există $e\in M$ astfel încât $x*e=e*x=x,(\forall)x\in M$.	3p
	$x*e=x,(\forall)x\in M\Leftrightarrow\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(e^2-1\right)+1}=x,(\forall)x\in M\Leftrightarrow$	
	$\left(x^2-1\right)\left(e^2-1\right)+1=x^2,(\forall)x\in M\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\left(e^2-2\right)=0,(\forall)x\in M\Leftrightarrow$	
	$\Leftrightarrow e=\sqrt{2}\in(1,\infty),(\forall)x\in M$	
	Să arătăm că oricare ar fi $x\in M$ există $x'\in M$ astfel încât $x*x'=x'*x=\sqrt{2}$.	
	$x*x'=\sqrt{2},(\forall)x\in M\Leftrightarrow\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(x'^2-1\right)+1}=\sqrt{2},(\forall)x\in M\Leftrightarrow$	
	$\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\left(x'^2-1\right)+1=2,(\forall)x\in M\Leftrightarrow x'^2-1=\frac{1}{x^2-1},(\forall)x\in M\Leftrightarrow$	2p
	$\Leftrightarrow x'^2=1+\frac{1}{x^2-1}>1,(\forall)x\in(1,\infty)\Rightarrow x'=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\in(1,\infty),(\forall)x\in(1,\infty)$	
	Deci orice element din M este inversabil în raport cu această lege.	
c)	Se arată prin inducție că $\underbrace{x*x*x*\ldots*x}_{de\ \ n\ \ ori}=\sqrt{\left(x^2-1\right)^n+1}$	2p
	$\underbrace{x*x*x*\ldots*x}_{de\ \ 2012\ \ ori}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{\left(x^2-1\right)^{2012}+1}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)^{2012}=1\Leftrightarrow x^2-1=1\Leftrightarrow$	2p
	$\Leftrightarrow x^2=2\Rightarrow x=\sqrt{2}\in M$	1p

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Dacă $x\in(-\infty,0)\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x\cdot e^{nx}}{1+e^{nx}}=\dfrac{1+x\cdot e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}}=1$	2p
	Dacă $x\in(0,\infty)\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x\cdot e^{nx}}{1+e^{nx}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{nx}\left(\frac{1}{e^{nx}}+x\right)}{e^{nx}\left(\frac{1}{e^{nx}}+1\right)}=x$	2p
	Pentru $x=0\Rightarrow f(0)=\dfrac{1}{1+e^0}=\dfrac{1}{2}$	1p
	$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x\cdot e^{nx}}{1+e^{nx}}=\begin{cases}1, & x\in(-\infty,0)\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\\ x, & x\in(0,\infty)\end{cases}$	
b)	$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=e^{f(x)+1}=e^{x+1}$	1p 1p 1p 2p
c)	Funcția $h(x)=e^{x+1}$ este continuă și derivabilă pe domeniul de definiție $(0,\infty)$, atunci h este continuă pe $[1,2]$ și derivabilă pe $(1,2)$, deci se poate aplica teorema lui Lagrange: adică există $c\in(1,2)$ astfel încât $h(2)-h(1)=(2-1)h'(c)\Rightarrow e^3-e^2=e^{c+1}\Leftrightarrow$	1p 1p
	$\Leftrightarrow e^{c+1}=e^2(e-1)\Rightarrow c+1=\ln e^2(e-1)\Rightarrow c=\ln e^2(e-1)-1$	1p
	Din $2<e<3\Rightarrow 1<e-1<2\Rightarrow e^2<e^2(e-1)<2e^2\Rightarrow 2<\ln e^2(e-1)<2+\ln 2\Rightarrow$	
	$\Rightarrow 1<\ln e^2(e-1)-1<1+\ln 2<2$; deci $c\in(1,2)$.	2p
2. a)	$\int_0^4 f^2(x)dx=\int_0^4\left(16-x^2\right)dx=$	2p
	$=\left(16x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Big\vert_0^4=$	2p
	$=64-\dfrac{64}{3}=\dfrac{128}{3}$	1p

www.mateinfo.ro

b) $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{f(x)}dx = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}dx = 0$ — 3p

Deoarece funcția $g(-x) = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}} = -g(x), (\forall)x \in \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$, deci h este funcție impară. — 2p

c) $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$ — 2p

x	-4		0		4
$f'(x)$	+ + + + + + +	0	- - - - - - - - - - - -		
$f(x)$	0	↗	4	↘	0

— 1p

Observăm că $0 \le f(x) \le 4 \Rightarrow 0 \le \int_{-4}^{4} f(x)dx \le 4x\Big|_{-4}^{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le \int_{-4}^{4} f(x)dx \le 16 - (-16) = 32$. — 2p

Deci $0 \le \int_{-4}^{4} f(x)dx \le 32$.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Viorica Lungana

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

www.mateinfo.ro

1.	$\frac{2x^3-3x^2+4x+9}{2x+1}=\frac{2x^3+x^2-4x^2-2x+6x+3+6}{2x+1}=$ $=\frac{x^2(2x+1)-2x(2x+1)+3(2x+1)+6}{2x+1}=\frac{(2x+1)(x^2-2x+3)+6}{2x+1}=$ $=\left(x^2-2x+3+\frac{6}{2x+1}\right)\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow\frac{6}{2x+1}\in\mathbf{Z}.$ $2x+1\vert 6\Leftrightarrow 2x+1\in\{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$ $2x+1=-6\Leftrightarrow x=-\frac{7}{2}\notin\mathbf{Z};\ 2x+1=-3\Leftrightarrow x=-2\in\mathbf{Z};\ 2x+1=-2\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}\notin\mathbf{Z};$ $2x+1=-1\Leftrightarrow x=-1\in\mathbf{Z};\ 2x+1=1\Leftrightarrow x=0\in\mathbf{Z};\ 2x+1=2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\notin\mathbf{Z};$ $2x+1=3\Leftrightarrow x=1\in\mathbf{Z};\ 2x+1=6\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}\notin\mathbf{Z}$ $A=\{-2,-1,0,1\}.$	3p 2p
2.	$y=5+\vert x-1\vert\Leftrightarrow\vert x-1\vert=y-5>0\Rightarrow\vert y-5\vert=y-5$ $2\vert x-1\vert=6\Leftrightarrow\vert x-1\vert=3\Leftrightarrow x-1=\pm3\Rightarrow\begin{matrix}x=4\Rightarrow y=8\\x=-2\Rightarrow y=8\end{matrix}$ Soluția $S=\{(4,8);(-2,8)\}$.	2p 2p 1p
3.	$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k, 0\le k\le n$; C.E. $n\ge 4; n\in\mathbf{N}$ $\frac{C_n^4}{C_n^2}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)}\cdot\frac{2!}{4!}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow$ $\frac{(n-2)(n-3)\cdot 2}{4\cdot 3\cdot 2}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow n^2-5n+6=42\Leftrightarrow n^2-5n-36=0\Rightarrow\begin{matrix}n_1=9\\n_2=-4\end{matrix}\Rightarrow n=9\in\mathbf{N}$	1p 2p 2p
4.	Fie $x_1,x_2\in(1,\infty)$ astfel încât $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow f(x_2)-f(x_1)=0\Leftrightarrow$ $(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2-3)=0\Leftrightarrow(x_2-x_1)[(x_2^2-1)+(x_1x_2-1)+(x_1^2-1)]=0\Rightarrow$ $\Rightarrow x_2-x_1=0\Leftrightarrow x_2=x_1\Rightarrow f$ funcție injectivă. Din $f(1)=-2$, f continuă și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\Rightarrow f((1,\infty))=(-2,\infty)\Rightarrow f$ surjectivă. f funcție injectivă și surjectivă, atunci f bijectivă.	2p 3p

www.mateinfo.ro

5.	$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$	1p
	$\vec{GA}=(3-3)\vec{i}+(2-4)\vec{j}=-2\vec{j}\,;\ \vec{GB}=(5-3)\vec{i}+(4-4)\vec{j}=2\vec{i}$	1p
	$-2\vec{j}+2\vec{i}+\vec{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{GC}=-2\vec{i}+2\vec{j}$	1p
	$(x_C-3)\vec{i}+(y_C-4)\vec{j}=-2\vec{i}+2\vec{j}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C-3=-2\\ y_C-4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=1\\ y_C=6\end{cases}\Rightarrow C(1,6)$	2p
6.	$E=2\left[(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3\right]-3\left[(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2\right]=$	2p
	$=2\left[(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)\right]-$ $-3\left[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right]=$	1p
	$=2(1-3\sin^2 x\cos^2 x)-3(1-2\sin^2 x\cos^2 x)=2-6\sin^2 x\cos^2 x-3+6\sin^2 x\cos^2 x=$ $=-1$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A_x=\begin{vmatrix}-x&-1&x&1\\1&x&1&-x\\x&1&x&1\\1&-x&-1&x\end{vmatrix}\overset{\substack{c1+c3\\c2+c4}}{=}\begin{vmatrix}0&0&x&1\\2&0&1&-x\\2x&2&x&1\\0&0&-1&x\end{vmatrix}=$	2p
	$=-2\cdot\begin{vmatrix}0&x&1\\2&1&-x\\0&-1&x\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}x&1\\-1&x\end{vmatrix}=$	2p
	$=4(x^2+1)$	1p
b)	$\det A_x=0\Leftrightarrow x^2+1=0\Leftrightarrow x=\pm i\in\mathbf{C}.$	1p
	Pentru $x\in\mathbf{C}-\{-i,i\}$ $rangA_x=4$	
	$x=i\Rightarrow\det A_x=0$; există $\begin{vmatrix}-i&-1&i\\1&i&1\\i&1&i\end{vmatrix}=-i^3-i+i-i^3+i+i=4i\neq0$	2p
	$x=-i\Rightarrow\det A_x=0$; există $\begin{vmatrix}i&-1&-i\\1&-i&1\\-i&1&-i\end{vmatrix}=i^3+i-i+i^3-i-i=-4i\neq0$	2p

www.mateinfo.ro

	Deci $rangA_x = 3$ pentru $x = \pm i$.	
c)	$\lvert z\rvert = \lvert x+iy\rvert = \sqrt{x^2+y^2}$ $\lvert i\rvert = \lvert 0+1\cdot i\rvert = 1;\ -\lvert i\rvert = \lvert 0-1\cdot i\rvert = 1$ $S = \lvert i\rvert + \lvert -i\rvert = 1+1 = 2$	1p 2p 2p
2. a)	$M(a) = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 \\ 2-2a & 2a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a & -1+a \\ 2-2a & -1+2a \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & a \\ -2a & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = A + aB$ cu $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	1p 3p 1p
b)	Arătăm că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea. Fie $M(x), M(y) \in G$, $M(x)M(y) = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-y & y-1 \\ 2-2y & 2y-1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 4-2x-2y+xy+2x-2-2xy+2y & 2y-xy-2+x+2xy-2y-x+1 \\ 4-4x-2y+2xy+4x-2-4xy+2y & 2y-2xy-2+2x+4xy-2y-2x+1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2-xy & xy-1 \\ 2-2xy & 2xy-1 \end{pmatrix} = M(xy) \in G$. Verificăm axiomele grupului: G_1 Se știe că înmulțirea matricelor este asociativă. G_2 $M(x)\cdot M(y) = M(xy) = M(yx) = M(y)\cdot M(x), (\forall) M(x), M(y) \in G$, deci înmulțirea este comutativă. G_3 $M(x)\cdot M(e) = M(x); (\forall) M(x) \in G \Leftrightarrow M(xe) = M(x); (\forall) M(x) \in G \Leftrightarrow xe = x, (\forall) x \in \mathbf{R}^* \Leftrightarrow x(e-1) = 0, (\forall) x \in \mathbf{R}^* \Rightarrow e = 1 \in \mathbf{R}^*, (\forall) x \in \mathbf{R} \Rightarrow M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \in G$ element neutru. G_4 $M(x)\cdot M(x') = M(e); (\forall) M(x) \in G \Leftrightarrow M(xx') = M(1); (\forall) M(x) \in G \Leftrightarrow xx' = 1, (\forall) x \in \mathbf{R}^* \Rightarrow x' = \frac{1}{x} \in \mathbf{R}^*, (\forall) x \in \mathbf{R}^*$, deci inversa oricărei matrice $M(x)$ este matricea $M\left(\frac{1}{x}\right)$.	1p 1p 1p 1p 1p

www.mateinfo.ro

	$(G,\cdot)$ grup abelian.	
c)	Fie funcția $f:\mathbf{R}^*\to G, f(x)=M(x)$. 1)Funcția este funcție bijectivă prin construcție. 2) $f(x\cdot y)=M(xy)=M(x)\cdot M(y)=f(x)\cdot f(y),(\forall)x,y\in\mathbf{R}^*$, adică f este morfism de grupuri. Deci funcția f este izomorfism de grupuri.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$l_s=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)=\frac{-p}{-1}=p$; $l_d=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\ln 1=0$; $f(0)=\ln 1=0$ Deci $l_s=l_d=f(0)\overset{p=0}{\Rightarrow} f$ continuă în $x=0$, adică, pentru $p=0$, f este continuă pe $[-1,1]$.	3p 2p
b)	$f'(x)=\begin{cases}\frac{(6x+r)(x-1)-3x^2-rx}{(x-1)^2}, & x<0\\ \frac{2qx-3}{qx^2-3x+1}, & x>0\end{cases}=\begin{cases}\frac{3x^2-6x-r}{(x-1)^2}, & x<0\\ \frac{2qx-3}{qx^2-3x+1}, & x>0\end{cases}$ $f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f'(x)=-r$; $f_d'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f'(x)=-3$ Dacă $f_s'(0)=f_d'(0)\Leftrightarrow r=3\Rightarrow f$ este derivabilă în $x=0$.	2p 2p 1p
c)	Funcția f verifică teorema lui Rolle, adică: f este continuă pe intervalul $[-1,1]$, f este derivabilă pe $(-1,1)$ și $f(-1)=f(1)$. $f(-1)=0$; $f(1)=\ln(q-2)$ $\ln(q-2)=0\Leftrightarrow q=3$ $S=p^2+q^2+r^2=0+3^2+3^2=18$	1p 1p 1p 2p
2. a)	$I_0=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx=x\Big\vert_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=1$	2p

www.mateinfo.ro

	$I_1=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,dx=0$, deoarece $\arcsin(-x)=-\arcsin x,(\forall)x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, deci funcția $g(x)=\arcsin x$ este funcție impară.	3p
b)	Dacă n este impar, atunci funcția $g(x)=(\arcsin x)^n$ este funcție impară, deci $I_{2n+1}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\arcsin x)^{2n+1}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}g(x)dx=0$.	1p
	Calculăm relația de recurență pentru n par $I_{2n}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\arcsin x)^{2n}dx=x(\arcsin x)^{2n}\Big\vert_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}-2n\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\arcsin x)^{2n-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$	1p
	$=\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n}+2n\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-x^2}\right)'(\arcsin x)^{2n-1}dx=$	1p
	$=\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n}+2n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{2n-1}\Big\vert_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}-2n\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}(2n-1)(\arcsin x)^{2n-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$	2p
	$=\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n}+2n\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n-1}-2n(2n-1)I_{2n-2}=\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n}+n\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n-1}-2n(2n-1)I_{2n-2}$ Deci $I_{2n}=\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n}+n\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n-1}-2n(2n-1)I_{2n-2}$	
c)	$-\frac{\pi}{6}\le\arcsin x\le\frac{\pi}{6}\Rightarrow\left(-\frac{\pi}{6}\right)^n\le(\arcsin x)^n\le\left(\frac{\pi}{6}\right)^n$ de unde, prin integrare obținem:	
	$\left(-\frac{\pi}{6}\right)^n\cdot x\Big\vert_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\le I_n\le\left(\frac{\pi}{6}\right)^n\cdot x\Big\vert_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow$	2p
	$\Leftrightarrow\left(-\frac{\pi}{6}\right)^n\le I_n\le\left(\frac{\pi}{6}\right)^n$	1p
	$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\pi}{6}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{6}\right)^n=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}I_n=0$, $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent.	2p

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Viorica Lungana

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Fie $\alpha \in \mathbf{Z}$ o rădăcină a ecuației $x^2 - mx + 6 = 0$ atunci $\alpha^2 - m\alpha + 6 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow m\alpha = \alpha^2 + 6 \Rightarrow m = \alpha + \frac{6}{\alpha} \in \mathbf{Z}$ dacă $\frac{6}{\alpha} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \alpha \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ $\alpha = -6 \Rightarrow m = -6 - 1 = -7$ $\alpha = -3 \Rightarrow m = -3 - 2 = -5$ $\alpha = -2 \Rightarrow m = -2 - 3 = -5$ $\alpha = -1 \Rightarrow m = -1 - 6 = -7$ $\alpha = 1 \Rightarrow m = 1 + 6 = 7$ $\alpha = 2 \Rightarrow m = 2 + 3 = 5$ $\alpha = 3 \Rightarrow m = 3 + 2 = 5$ $\alpha = 6 \Rightarrow m = 6 + 1 = 7$ Deci, pentru $m \in \{-7, -5, 5, 7\}$ ecuația admite rădăcini întregi.	3p 2p
2.	Dacă $x + y + z = 1$ inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4(xy + yz + zx) - 1$ devine: $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4(xy + yz + zx) - (x + y + z)^2 \Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4xy + 4yz + 4zx - x^2 - y^2 - z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$ evident adevărată.	1p 2p 2p

www.mateinfo.ro

	Observăm că pentru $x=y=z$ relația devine egalitate.	
3.	Funcția $f(x)=3^x+4^x$ este strict crescătoare, ca sumă de funcții strict crescătoare. Funcția $g(x)=8-x$ este funcție strict descrescătoare (este o funcție de gradul I cu coeficientul lui x este negativ). Deci ecuația dată admite soluție unică. Observăm că $x=1$ este soluție: $3^1+4^1=8-1\Leftrightarrow 7=7$	1p 2p 2p
4.	8+15=23 jucători. Observăm că antrenorul va face grupe (echipe) care nu depind de ordine, deci $C_{23}^5=\frac{23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=23\cdot 11\cdot 7\cdot 19$ moduri	2p 3p
5.	Fie $M(\alpha,\beta)\Rightarrow \vec{OM}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$ $\vec{v}\cdot\vec{OM}=3\Leftrightarrow\left(3\vec{i}+2\vec{j}\right)\left(\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}\right)=3\Leftrightarrow 3\alpha+2\beta=3$ Coordonatele punctului $M(x,y)$ verifică ecuația dreptei $3x+2y-3=0$	2p 3p
6.	$\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=1\\ \cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=1\\ \cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow$ prin adunare: $1+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+1=\frac{5}{4}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2\cos(\alpha-\beta)=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow\cos(\alpha-\beta)=-\frac{3}{4}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Fie $A=\begin{pmatrix}2&-1&1&-1\\1&1&m&1\\1&-1&1&n\end{pmatrix}$ matricea sistemului. $rangA=2$ dacă toți minorii de ordinul 3 sunt nuli. Deoarece $\begin{vmatrix}2&-1\\1&1\end{vmatrix}=3\neq 0$, atunci rangul matricei poate fi 2 sau 3.	2p

www.mateinfo.ro

	$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2-1-m-1+2m+1 = m+1$ $\Delta_1 = 0 \Leftrightarrow m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & n \end{vmatrix} = 2n-1-1+1+2+n = 3n+1$ $\Delta_2 = 0 \Leftrightarrow 3n+1=0 \Leftrightarrow n=-\frac{1}{3}$ Deci, pentru $m=-1$ și $n=-\frac{1}{3} \Rightarrow rangA=2$.	2p 1p	
b)	Considerăm $\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, ecuații principale: ecuațiile 1 și a 2-a, ecuații secundare: ecuația a 3-a. Sistemul este compatibil dacă $\Delta_{car} = 0$. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & p \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2p-1+1-1-2+p=0 \Leftrightarrow 3p-3=0 \Leftrightarrow p=1$. Deci pentru $p=1$ sistemul este compatibil nedeterminat.	3p 2p	
c)	Necunoscute principale: x și y, necunoscute secundare z și t. Fie $z=\alpha \in \mathbf{R}$ și $t=\beta \in \mathbf{R}$; rezolvăm sistemul: $\begin{cases} 2x-y=1-\alpha+\beta \\ x+y=-1+\alpha-\beta \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} y=-x-1+\alpha-\beta \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\alpha-\beta-1 \end{cases}$ Soluția sistemului $S=\{(0,\alpha-\beta-1,\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in R\}$	1p 2p 2p	
2. a)	$x^3-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow$	1p 3p	

www.mateinfo.ro

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x^2+x+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\varepsilon \\ x=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\varepsilon^2 \end{cases} \end{cases}$ Deci $\varepsilon^3=1,\ \varepsilon^2+\varepsilon+1=0$	1p
b)	$g=X^3+(a+p)X^2+(b+p)X+c+p=X^3+aX^2+pX^2+bX+pX+c+p \Rightarrow$ $g=f+p(X^2+X+1) \Leftrightarrow g-f=p(X^2+X+1)$ Pentru $\varepsilon \Rightarrow g(\varepsilon)-f(\varepsilon)=p(\varepsilon^2+\varepsilon+1)=0 \Rightarrow \varepsilon$ rădăcină comună. Pentru $\varepsilon^2 \Rightarrow g(\varepsilon^2)-f(\varepsilon^2)=p(\varepsilon^4+\varepsilon+1)=0 \Rightarrow \varepsilon^2$ rădăcină comună. Deci, rădăcinile comune celor două polinoame sunt: ε și ε^2.	3p 2p
c)	Fie ε rădăcina comună a celor două polinoame. $g(\varepsilon)=\varepsilon^3+a\varepsilon^2+b\varepsilon+c+p(\varepsilon^2+\varepsilon+1)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 1+a\varepsilon^2+b\varepsilon+c+p\cdot 0=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a\varepsilon^2+b\varepsilon+c+1=0$ și $p \in \mathbf{R}$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Funcția f este continuă în $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0)$. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{3x^2+nx-p}{x-1}=p$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(rx^2-3x+1)=\ln 1=0$; $f(0)=\ln 1=0$. Deci f este continuă în $x=0$ dacă $p=0$. f derivabilă în $x=0$ dacă f este continuă și $f_s'(0)=f_d'(0)$. $p=0 \Rightarrow \left(\dfrac{3x^2+nx}{x-1}\right)'=\dfrac{(6x+n)(x-1)-3x^2-nx}{(x-1)^2}=\dfrac{3x^2-6x-n}{(x-1)^2}$	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-6x-n}{(x-1)^2}, & x<0\\ \dfrac{2rx-3}{rx^2-3x+1}, & x>0\end{cases}$$

$$f_s'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{3x^2-6x-n}{(x-1)^2}=-n$$

$$f_d'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{2rx-3}{rx^2-3x+1}=-3$$

Deci f este derivabilă în $x=0$ dacă $n=3$.

b) Condițiile teoremei lui Rolle sunt: f este continuă pe $[-1,1]$; f este derivabilă pe $(-1,1)$; — 1p

$f(-1)=f(1)$, atunci există $c\in(-1,1)$ astfel încât $f'(c)=0$. — 1p

Pentru $p=0$, f este continuă pe $[-1,1]$ și pentru $p=0$ și $n=3$ f este derivabilă în $x=0$. — 1p

$f(-1)=0$; $f(1)=\ln(r-2)$. — 2p

$$f(-1)=f(1)\Leftrightarrow \ln(r-2)=0\Leftrightarrow r-2=1\Rightarrow r=3\in\left(\frac{3}{2},\infty\right).$$

$3x^2-3x+1>0$, deci are sens logaritmul.

c) Observăm că $f'(0)=-3\Rightarrow m=-3$ — 1p

$y-y_0=f'(0)(x-x_0)$ — 1p

Dar $x_0=0; y_0=0\Rightarrow$ — 1p

Ecuația tangentei este $y=-3x$ — 2p

2. Pentru a explicita funcția $f(x)$, studiem monotonia funcției $g(t)=t^2-2t$ — 2p

a) $t_V=1; g(1)=-1$ — 2p

t	$-\infty$ $t\le x$	1	$t\le x$ ∞
$g(t)=t^2-2t$	↘	-1	↗

— 1p

Pentru $x\in(-\infty,1)\Rightarrow g(t)$ este strict descrescătoare, adică $t\le x\Rightarrow g(x)\le g(t)$, atunci $\inf g(t)=g(x)=x^2-2x$.

www.mateinfo.ro

Pentru $x\in[1,\infty)\Rightarrow g(t)$ este strict crescătoare, adică $1\le t\le t\Rightarrow g(1)\le g(t)\le g(x)$

atunci $\inf g(t)=g(1)=-1$.

Deoarece $h(t)=8-3t$ este strict descrescătoare pe **R**, atunci $t\le x\Rightarrow g(x)\le g(t)$, deci

$\inf g(t)=g(x)=8-3x$.

Așadar $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\in(-\infty,1)\\ -1, & x\in[1,3]\\ 8-3x, & x\in(3,\infty)\end{cases}$.

b) $\int_0^4 f(x)dx=\int_0^1(x^2-2x)dx+\int_1^3(-1)dx+\int_3^4(8-3x)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_0^1-x\Big|_1^3+\left(8x-\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_3^4=$ 1p 1p 1p

$=\frac{1}{3}-1-3+1+32-24-24+\frac{27}{2}=-19+\frac{83}{6}=-\frac{31}{6}$ 2p

c) Observăm că funcția f este continuă pe intervalul $[0,4]$ și $f(x)\le 0,(\forall)x\in[0,4]$, atunci 2p

$aria(\Gamma_f)=-\int_0^4 f(x)dx=\frac{31}{6}$. 1p

$vol(C_f)=\pi\int_0^4 f^2(x)dx=\pi\left[\int_0^1(x^2-2x)^2dx+\int_1^3(-1)^2dx+\int_3^4(8-3x)^2dx\right]=$ 2p

$=\pi\left[\int_0^1(x^4-4x^3+4x^2)dx+x\Big|_1^3+\int_3^4(64-48x+9x^2)dx\right]=$

$=\pi\left[\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^1+3-1+\left(64x-24x^2+3x^3\right)\Big|_3^4\right]=$

$=\pi\left(\frac{1}{5}-1+\frac{4}{3}+2+64(4-3)-24(16-9)+3(64-27)\right)=$

$=\pi\left(\frac{23}{15}+1+64-168+111\right)=\pi\left(\frac{23}{15}+8\right)=\frac{143}{15}\pi$

www.mateinfo.ro

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

Prof: Viorica Lungana

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Relațiile lui Viéte pentru ecuația $x^2-2(a-1)x-2a+1=0$ sunt: $x_1+x_2=2(a-1)$, $x_1x_2=1-2a$ $\frac{x_1}{x_2^2}+\frac{x_2}{x_1^2}\geq\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\Leftrightarrow\frac{x_1^3+x_2^3}{(x_1x_2)^2}\geq\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}\Leftrightarrow\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1x_2)^2}-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\geq 0$ $\Rightarrow\frac{8(a-1)^3-6(a-1)(1-2a)}{(1-2a)^2}-\frac{2(a-1)}{1-2a}\geq 0\Leftrightarrow\frac{4(a-1)^3-3(a-1)(1-2a)}{(1-2a)^2}-\frac{a-1}{1-2a}\geq 0$ $\Rightarrow\frac{4(a-1)^3-4(a-1)(1-2a)}{(1-2a)^2}\geq 0\Rightarrow(a-1)^3-(a-1)(1-2a)\geq 0\Rightarrow$ $\Rightarrow(a-1)(a^2-2a+1-1+2a)\geq 0\Leftrightarrow a^2(a-1)\geq 0\Rightarrow\begin{matrix}a-1\geq 0\\ a=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}a\geq 1\\ a=0\end{matrix}\Rightarrow$ $\Rightarrow a\in[1,\infty)\cup\{0\}.$	3p 2p
2.	$(f\circ g)(x)=f(g(x))=g^2(x)+2g(x)+2=g^2(x)+2g(x)+1+1=(g(x)+1)^2+1=$ $=(x^2+2x+1)^2+1=x^4+4x^2+1+4x^3+2x^2+4x+1=x^4+4x^3+6x^2+4x+2$ $(g\circ f)(x)=g(f(x))=f^2(x)+2f(x)=(x^2+2x+2)^2+2(x^2+2x+2)=$ $=x^4+4x^2+4+4x^3+4x^2+8x+2x^2+4x+4=x^4+4x^3+10x^2+12x+8$ $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)\Leftrightarrow x^4+4x^3+6x^2+4x+2=x^4+4x^3+10x^2+12x+8\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4x^2+8x+6=0\Leftrightarrow 2x^2+4x+3=0$	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

	$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 24 = -8 < 0 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții reale.	
3.	Fie $A = \{1,2,...,10\}$ și $B = \{2,3,...,10\}$ Mulțimea A are 2^{10} submulțimi, iar mulțimea B are 2^9 submulțimi. Numărul submulțimilor care îl conțin pe 1 este $2^{10} - 2^9 = 2^9(2-1) = 2^9 = 512$	1p 2p 2ps
4.	$\log_7(4\cdot 2^x - 2^{x-1}) = 1 + \log_7 4 \Leftrightarrow \log_7(4\cdot 2^x - 2^{x-1}) = \log_7 7 + \log_7 4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \log_7(4\cdot 2^x - 2^{x-1}) = \log_7 28 \Rightarrow 4\cdot 2^x - 2^{x-1} = 28 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 8\cdot 2^x - 2^x = 56 \Leftrightarrow 7\cdot 2^x = 56 \Rightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$	2p 3p
5.	$E(x) = \sin^2 x + 2\cos x\cos a\cos(a+x) - \cos^2(a+x) =$ $= \sin^2 x + \cos(a+x)[2\cos x\cos a - \cos a\cos x + \sin a\sin x] =$ $= \sin^2 x + (\cos a\cos x - \sin a\sin x)(\cos x\cos a + \sin a\sin x) =$ $= \sin^2 x + \cos^2 x\cos^2 a - \sin^2 x\sin^2 a = \sin^2 x + (1-\sin^2 x)(1-\sin^2 a) - \sin^2 x\sin^2 a =$ $= \sin^2 x + 1 - \sin^2 x - \sin^2 a + \sin^2 x\sin^2 a - \sin^2 x\sin^2 a = 1 - \sin^2 a = \cos^2 a$	2p 3p
6.	Imaginea punctului $P(2,3)$ prin simetrie de centru $P_0(x_0, y_0)$ este punctul $P'(4,-5)$, adică punctul P_0 este mijlocul segmentului PP', rezultă: $x_0 = \frac{x_P + x_{P'}}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$; $y_0 = \frac{y_P + y_{P'}}{2} = \frac{3-5}{2} = -1 \Rightarrow P_0(3,-1)$.	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Matricea A este inversabilă dacă $\det A \neq 0$. $\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3a + 2a + 1 + 2 - a^2 - 3 = -a^2 - a$ $-a^2 - a = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ a = -1 \end{matrix}$ Deci pentru $a \in \mathbf{R} - \{-1,0\} \Rightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$ există A^{-1}.	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro

b) Pentru $a=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\2&1&3\end{pmatrix}$; $\det A=-1-1=-2\neq 0$ — 1p

$A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\2&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1&5\\2&3&3\\9&4&12\end{pmatrix}$ — 2p

$B=\frac{1}{\det A}\left(A^2-3A-5I_3\right)=-\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}4&1&5\\2&3&3\\9&4&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&-3&-3\\-3&3&-3\\-6&-3&-9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&-5&0\\0&0&-5\end{pmatrix}\right]=$ — 2p

$=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-4&-2&2\\-1&1&0\\3&1&-2\end{pmatrix}$

c) Folosim formula Hamilton – Cayley pentru matricea de ordinul 3: — 1p

$A^3-TrA\cdot A^2+TrA^*\cdot A-\det A\cdot I_3=0$ — 2p

$TrA=1-1+3=3$

$TrA^*=\Gamma_{11}+\Gamma_{22}+\Gamma_{33}=-4+1-2=-5$ — 2p

$A^3-3A^2-5A+2I_3=0\Leftrightarrow A\left(A^2-3A-5I_3\right)=-2I_3\Leftrightarrow A\cdot\left[-\frac{1}{2}\left(A^2-3A-5I_3\right)\right]=I_3$

$\Rightarrow A^{-1}=B=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&-2&2\\-1&1&0\\3&1&-2\end{pmatrix}$ calculată la punctul b).

2. a) $x*y=1+(x-1)^{\ln(y-1)}=1+e^{\ln(x-1)^{\ln(y-1)}}=1+e^{\ln(y-1)\ln(x-1)},(\forall)x,y\in G$, (1) — 2p

$y*x=1+(y-1)^{\ln(x-1)}=1+e^{\ln(y-1)^{\ln(x-1)}}=1+e^{\ln(x-1)\ln(y-1)},(\forall)x,y\in G$, (2) — 2p

Din relațiile (1) și (2), rezultă că legea este comutativă. — 1p

b) $(x*y)*z=1+(x*y-1)^{\ln(z-1)}=1+\left[1+(x-1)^{\ln(y-1)}-1\right]^{\ln(z-1)}=1+(x-1)^{\ln(y-1)\ln(z-1)}$, $(\forall)x,y,z\in G$, (1) — 2p

$x*(y*z)=1+(x-1)^{\ln(y*z-1)}=1+(x-1)^{\ln\left[1+(y-1)^{\ln(z-1)}-1\right]}=1+(x-1)^{\ln(y-1)^{\ln(z-1)}}=$ — 2p

$=1+(x-1)^{\ln[z-1]\ln(y-1)},(\forall)x,y,z\in G$, (2) — 1p

www.mateinfo.ro

	Din relațiile (1) și (2), rezultă că legea este asociativă.	
c)	Dacă $x=y=z$, atunci din asociativitatea legii obținem $x*x*x=1+(x-1)^{\ln^2(x-1)}$. $x*x*x=e^{27}+1\Leftrightarrow 1+(x-1)^{\ln^2(x-1)}=e^{27}+1\Leftrightarrow (x-1)^{\ln^2(x-1)}=e^{27}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ln(x-1)^{\ln^2(x-1)}=\ln e^{27}\Leftrightarrow [\ln(x-1)]^3=27\Leftrightarrow \ln(x-1)=3\Rightarrow x-1=e^3\Rightarrow$ $\Rightarrow x=1+e^3$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Studiem monotonia șirului. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n\cdot x_{n+1}}{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}=x_{n+1}=\frac{8n+5}{8n+9}<1\Rightarrow$ $\Rightarrow a_{n+1}<a_n,(\forall)n\in\mathbf{N}^*\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.	2p 1p
b)	Folosim metoda inducției matematice. Fie $P(n):a_n<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}},(\forall)n\geq 1$ $P(1):a_1=x_1=\frac{8-3}{8+1}=\frac{5}{9}<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}\Rightarrow 5\sqrt{13}<9\sqrt{5}\Rightarrow\sqrt{5\cdot 13}<9\Rightarrow 65<81$ adevărat, rezultă $P(1):a_1<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$ adevărată. Presupunem relația adevărată pentru $n=k$ și demonstrăm că este adevărată pentru $n=k+1,(\forall)k\geq 1$ $P(k):a_k=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_k<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8k+5}}$ $P(k+1):a_{k+1}=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_k\cdot x_{k+1}=(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_k)\cdot x_{k+1}<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8k+5}}\cdot x_{k+1}=$ $=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8k+5}}\cdot\frac{8k+5}{8k+9}=\frac{\sqrt{5(8k+5)}}{8k+9}<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8k+13}}\Rightarrow\sqrt{8k+5}\cdot\sqrt{8k+13}<8k+9\Rightarrow$ $\Rightarrow 64k^2+104k+40k+65<64k^2+144k+81\Leftrightarrow 65<81$ adevărat, rezultă $P(k+1)$	1p 1p 2p

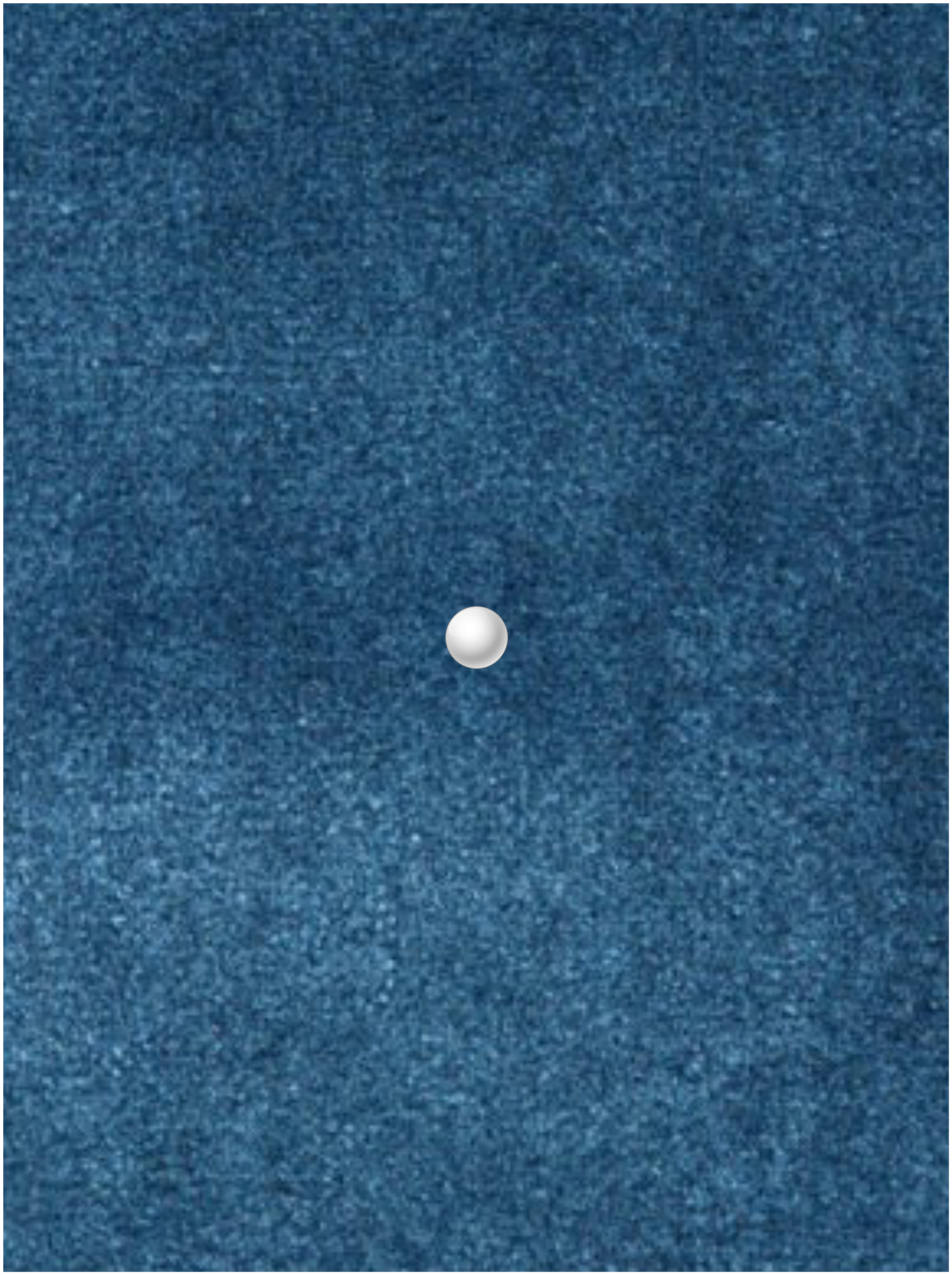
www.mateinfo.ro

	adevărată, $(\forall)k \geq 1$. Deci $P(n): a_n < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}}, (\forall)n \geq 1$.	1p
c)	Observăm că $a_n > 0, (\forall)n \in \mathbf{N}^*$. Deci $0 < a_n < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}}, (\forall)n \geq 1 \Rightarrow$ șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător, rezultă șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Folosim criteriul majorării și obținem: $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	1p 1p 2p 1p
2. a)	$x^3+3x^2+8x+6 = x^3+x^2+2x^2+2x+6x+6 =$ $= x^2(x+1)+2x(x+1)+6(x+1) =$ $= (x+1)(x^2+2x+6)$	2p 2p 1p
b)	$I_1 = \int f_1(x)dx = \int \frac{x^3+3x^2+8x+6}{x^2+2x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)(x^2+2x+6)}{x^2+2x+4}dx$ $H_1 = \frac{1}{2}\int \frac{t+2}{t}dt = \frac{1}{2}\int\left(1+\frac{2}{t}\right)dt = \frac{t}{2}+\ln t + C \Rightarrow$ $\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}(x^2+2x+4)+\ln(x^2+2x+4)+C$ $I_2 = \int f_2(x)dx = \int \frac{x^3+3x^2+8x+6}{(x^2+2x+4)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)(x^2+2x+6)}{(x^2+2x+4)^2}dx$ $H_2 = \frac{1}{2}\int \frac{t+2}{t^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt + \int \frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{t} + C \Rightarrow$ $\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4) - \frac{1}{x^2+2x+4} + C$	1p 1p 1p 2p
c)	$I_n = \int f_n(x)dx = \int \frac{x^3+3x^2+8x+6}{(x^2+2x+4)^n}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)(x^2+2x+6)}{(x^2+2x+4)^n}dx$ Facem substituția $t = x^2+2x+4 \Rightarrow dt = (2x+2)dx$	2p 1p 2p

www.mateinfo.ro

$$H_n=\frac{1}{2}\int\frac{t+2}{t^n}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^{n-1}}dt+\int\frac{1}{t^n}dt=\frac{1}{2}\int t^{-n+1}dt+\int t^{-n}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-n+2}}{-n+2}+\frac{t^{-n+1}}{-n+1}+C=-\frac{1}{2(n-2)}\cdot\frac{1}{t^{n-2}}-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{t^{n-1}}+C\Rightarrow$$

$$I_n=-\frac{1}{2(n-2)}\cdot\frac{1}{\left(x^2+2x+4\right)^{n-2}}-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\left(x^2+2x+4\right)^{n-1}}+C,(\forall)n\geq 3$$

www.mateinfo.ro